1932 № 9

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

IMPERIAL MYCOLOGICAL
28 JUNE 1933
INSTITUTE

BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ - EXEMPLE DE CITATION

С. Н. Бернштейн. О формуле приближенного интегрирования Чебышева. ИМЕН, 1932, № 9, стр. 1219.

S. Bernstein. Sur la formule de quadrature approchée de Tchebycheff. BAS-MN, 1932, № 9, p. 1219 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Декабрь 1932 г.

Непременный секретарь академик *В. Волин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров

Ученый корректор А. В. Суслов

Начато набором в июле 1932 г. — Подписано к печати 15 декабря 1932 г.

212 (1163—1374) стр. (28 фиг. и 5 табл.)

Формат бум. 72 × 110 см. — 13 4/8 печ. л. — 42 000 тип. зн. в печ. л. — Тираж 2300

Ленгорлит № 62151. — АНИ № 317. — Заказ № 2156

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ÜBER EINIGE FUNKTIONEN, WELCHE IN ZWEI GEGEBENEN INTERVALLEN AM WENIGSTEN VON NULL ABWEICHEN

Von N. ACHYESER

(*Présenté par* S. Bernstein, *membre de l'Académie des Sciences*)

I TEIL

I Kapitel

Allgemeine Sätze über Polynome minimaler Abweichung für zwei Intervalle

§ 1. **Fundamentale Definitionen und Sätze.** Es bezeichne $\mathcal{E}$ die aus zwei abgeschlossenen Intervallen

$$<-1, \alpha>, <\beta, 1> \quad (-1<\alpha<\beta<1)$$

bestehende Zahlenmenge oder die ihr entsprechende Punktmenge der komplexen x-Ebene.

Sind $f(x)$ und $F(x)$ zwei in $\mathcal{E}$ definierte und stetige reelle Funktionen, so soll die Grösse

$$\max_{x \gtrless \mathcal{E}} |f(x) - F(x)|$$

als *Abweichung* der Funktion $F(x)$ von der Funktion $f(x)$ in $\mathcal{E}$ bezeichnet werden. Hängt dabei $F(x)$ von einem oder mehreren Parametern ab, so entsteht die Aufgabe, diese Parameter derart zu bestimmen, dass die enstprechende Abweichung möglichst klein werde, um somit die beste Annäherung der Funktion $f(x)$ in $\mathcal{E}$ vermöge der Funktion $F(x)$ zu erhalten. Der einfachste und dabei wichtigste Fall dieser Aufgabe entsteht dann, wenn $F(x)$ ein Polynom vom gegebenen Grade n mit reellen Koeffizienten,

welche l $(0 \leqslant l < n+1)$ gegebenen Gleichungen genügen, ist (die Anzahl der Parametern ist $n-l+1$).

In vorliegender Arbeit wird gerade dieser einfachste Fall betrachtet und dabei wird angenommen, dass die l-Gleichungen, welchen die Koeffizienten der ganzen Funktion $F(x)$ genügen, die Form

$$\text{(B)} \qquad F(a_1)=A_1, \quad F(a_2)=A_2, \quad \ldots, \quad F(a_l)=A_l$$

haben, wo $a_1, a_2, \ldots, a_l$ gegebene der Menge $\mathcal{E}$ nicht angehörende Grössen und $A_1, A_2, \ldots, A_l$ gegebene Zahlen bedeuten; die nicht reellen unter den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_l$, sowie die entsprechenden Zahlen A_i, sind dabei als paarweise konjugiert komplex vorausgesetzt (ein einfacher Grenzübergang erlaubt die Bedingungen (B) durch allgemeinere zu ersetzen, welche nicht nur die Werte der ganzen Funktion $F(x)$, sondern auch die Werte ihrer Ableitungen in gegebenen Stellen fixieren).

Für die folgenden Untersuchungen sind von grosser Bedeutung drei Sätze, welche wir jetzt kurz beweisen wollen und von welchen die zwei ersten die bekannten Sätze von de la Vallée-Poussin und Tschebyscheff-Markoff verallgemeinern.[1]

Satz I. Existiert eine den Bedingungen (B) genügende ganze rationale Funktion n-ten Grades $Q_n(x)$ mit der Eigenschaft, dass die Differenz $f(x)-Q_n(x)$ an μ Stellen $x_1 < x_2 < \ldots < x_\mu$ des Intervalls $<-1, \alpha>$ die Werte

$$-\lambda_1, (-1)^2\lambda_2, \ldots, (-1)^\mu\lambda_\mu$$

und an ν Stellen $x_{\mu+1} < x_{\mu+2} < \ldots < x_{\mu+\nu}$ des Intervalls $<\beta, 1>$ die Werte

$$(-1)^{\mu+j+1}\lambda_{\mu+1}, \quad (-1)^{\mu+j+2}\lambda_{\mu+2}, \quad \ldots, (-1)^{\mu+j+\nu}\lambda_{\mu+\nu}$$

annimmt, wobei alle Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mu+\nu}$ von Null verschieden sind und ein und dasselbe Vorzeichen haben, j die Anzahl derjenigen unter den Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_l$ bedeutet, welche in (α, β) liegen, und

$$\mu+\nu = n-l+2,$$

[1] S. Bernstein. Leçons sur les propriétés extrémales des fonctions analytiques, p. 3—6 (Paris, 1926); C. de la Vallée-Poussin. Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, p. 75 (Paris, 1919); A. A. Markoff. Über Funktionen, welche am wenigsten von Null abweichen, p. 11—16 (lithogr. Vorlesungen, russisch, 1906); E. Borel. Leçons sur les fonctions de variables réelles, p. 87 (Paris, 1905).

so gibt es keine ganze Funktion n-ten Grades, welche den Bedingungen (B) genügt und von $f(x)$ in $\mathcal{E}$ weniger, als um

$$\min\{|\lambda_1|, \quad |\lambda_2|, \ \ldots, \ |\lambda_{\mu+\nu}|\}$$

abweicht.

Beweis. Zum Beweise nehmen wir an, dass $R_n(x)$ eine den Bedingungen (B) genügende ganze Funktion n-ten Grades ist, für welche

$$\max_{x \prec \mathcal{E}} |(f(x) - R_n(x)| < \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ \ldots, \ |\lambda_{\mu+\nu}|\}.$$

Die Differenz

$$R_n(x) - Q_n(x) = \{f(x) - Q_n(x)\} - \{f(x) - R_n(x)\},$$

welche auch eine ganze Funktion n-ten Grades ist, hat den Bedingungen des Satzes zufolge mindestens $\mu - 1$ Nullstellen im Intervalle (x_1, x_μ) und mindestens $\nu - 1$ Nullstellen im Intervalle $(x_{\mu+1}, x_{\mu+\nu})$, denn die Grössen $R_n(x_k) - Q_n(x_k)$ und $f(x_k) - Q_n(x_k)$ haben für jedes k von 1 bis $\mu + \nu$ gleiche Vorzeichen. Daraus kraft den Eigenschaften von $Q_n(x)$ folgt auch, dass $R_n(x_\mu) - Q_n(x_\mu)$ und $(-1)^j \{R_n(x_{\mu+1}) - Q_n(x_{\mu+1})\}$ entgegengesetzte Vorzeichen haben; und da $R_n(x) - Q_n(x)$ in (α, β) mindestens j Nullstellen besitzt, so hat diese Differenz im Intervalle $(x_\mu, x_{\mu+1})$ mindestens $j + 1$ Nullstellen. Ausserdem hat $R_n(x) - Q_n(x)$ noch $l - j$ Nullstellen, welche dem Intervalle $< -1, 1 >$ nicht angehören (das sind diejenigen unter den Stellen $a_1, a_2, \ldots, a_l$, welche nicht in (α, β) liegen). Die Gesamtanzahl der Nullstellen des Polynoms n-ten Grades $R_n(x) - Q_n(x)$ ist somit nicht kleiner, als

$$\mu - 1 + \nu - 1 + j + 1 + l - j = n + 1,$$

was unmöglich ist.

Satz II. Unter allen den Bedingungen (B) genügenden ganzen Funktionen n-ten Grades existiert eine und nur eine Funktion $P_n(x)$, deren Abweichung von $f(x)$ in $\mathcal{E}$ den kleinsten Wert $L_n = E_n[f(x)]$ hat. Diese ganze Funktion wird vollständig durch die folgende Eigenschaft charakterisiert: die Anzahl aufeinander folgender Stellen des Intervalls $< -1, \alpha >$, in welchen die Differenz $f(x) - P_n(x)$ mit abwechselnden Vorzeichen den Wert L_n annimmt,[2] vermehrt um die Anzahl solcher Stellen des

[2] Diese Stellen werden oft Abweichungsstellen für das betrachtete Intervall genannt.

Intervalls $<\beta, 1>$, ist nicht kleiner als $n-l+2$ und im Falle der Gleichheit ist die Vorzeichenbedingung

$$(V) \qquad f(x_\mu)-P_n(x_\mu)=(-1)^{j+1}\{f(x_{\mu+1})-P_n(x_{\mu+1})\}$$

erfüllt, wo x_μ und $x_{\mu+1}$ bzw. die letzte Abweichungsstelle im Intervalle $<-1, \alpha>$ und die erste Abweichungsstelle im Intervalle $<\beta, 1>$ bezeichnen, während j dieselbe Bedeutung, wie im Satze I, hat.

Beweis. Dass $P_n(x)$ existiert, kann ebenso bewiesen werden, wie im Falle der Approximation auf einem Intervalle.[1] Dass die charakteristische Eigenschaft hinreichend ist (mit andern Worten, dass jede diese Eigenschaft besitzende ganze Funktion n-ten Grades in $\mathcal{E}$ am wenigsten von $f(x)$ abweicht) folgt unmittelbar aus dem Satze I. Wäre aber auch die Notwendigkeit der charakteristischen Eigenschaft bewiesen, so könnte man die Einzigkeit des Polynoms $P_n(x)$ ebenso, wie im Falle eines Intervalls, zeigen und somit den Beweis des ganzen Satzes beendigen. Ich gehe zum Beweise der Notwendigkeit über. Es sei $P_n(x)$ eine den Bedingungen (B) genügende ganze Funktion n-ten Grades, für welche die charakteristische Eigenschaft nicht erfüllt ist, und zwar sei die Gesamtanzahl der Abweichungsstellen $n-l+2$, aber anstatt der Vorzeichenbedingung (V) gelte die Gleichung

$$(a) \qquad f(x_\mu)-P_n(x_\mu)=(-1)^j\{f(x_{\mu+1})-P_n(x_{\mu+1})\}$$

(ganz ebenso verläuft der Beweis, wenn die Gesamtanzahl der Abweichungsstellen kleiner als $n-l+2$ ist). Offenbar kann man das Intervall $<-1, \alpha>$ vermöge passend gewählter Stellen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\mu-1}$ derart in μ kleinere Intervalle zerlegen, dass in jedem von ihnen abwechselnd eine der zwei Ungleichungen

$$(b) \quad -L_n \leqslant f(x)-P_n(x) < L_n-\varepsilon, \qquad -L_n+\varepsilon < f(x)-P_n(x) \leqslant L_n$$

gelten wird, wo ε eine positive Grösse bedeutet. Es sei auch das Intervall $<\beta, 1>$ vermöge der Stellen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu-1}$ in ν solche Unterintervalle zerlegt. Ich nehme die Funktion

$$(c) \qquad P_n(x) \pm \omega\Phi(x)$$

mit einem positiven Parameter ω und

$$\Phi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_l)(x-\xi_1)\ldots$$
$$(x-\xi_{\mu-1})(x-\eta_1)\ldots(x-\eta_{\nu-1}).$$

Offenbar ist (c) auch eine den Bedingungen (B) genügende ganze Funktion n-ten Grades. Aber nach (a) und (b) ist ersichtlich, dass bei genügend kleinem ω und bei passend gewähltem Vorzeichen

$$\max_{x \prec \mathcal{E}} |f(x) - \{P_n(x) \pm \omega \Phi(x)\}| < L_n;$$

also ist $P_n(x)$ nicht dass in $\mathcal{E}$ am wenigsten von $f(x)$ abweichende Polynom von betrachteten Typus und die Notwendigkeit der charakteristischen Eigenschaft ist bewiesen.

Bemerkung. Die Grösse $L_n = E_n[f(x)]$ werden wir als die beste in $\mathcal{E}$ Annäherung der Funktion $f(x)$ durch Polynome n-ten Grades des betrachteten Typus bezeichnen. Das Polynom $P_n(x)$ kann dabei das Polynom der besten Annäherung genannt werden.

Satz III. Es sei $P_n(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$ dasjenige Polynom n-ten Grades, welches den Bedingungen (B) genügt und in $\mathcal{E}$ am wenigsten von $f(x)$ abweicht. Ist $f(x)$ in E

(E) $$< -1, a >, \quad < b, 1 >$$

stetig und gehört keine der Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_l$ der Zahlenmenge E an, so sind alle Koeffizienten $p_0, p_1, \ldots, p_n$ des Polynoms $P_n(x)$ stetige Funktionen von α und β, falls die Ungleichungen

$$-1 < \alpha < a, \quad b < \beta < 1$$

erfüllt sind.

Beweis. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots$ zwei unendliche den Ungleichungen

$$-1 < \alpha_i < a, \quad b < \beta_i < 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots$$

genügende Zahlenfolgen, für welche

(d) $$\lim_{i \to \infty} \alpha_i = \alpha, \quad \lim_{i \to \infty} \beta_i = \beta,$$

und es bezeichne $\mathcal{E}_i$ die aus den Intervallen

$$< -1, \alpha_i >, \quad < \beta_i, 1 >$$

bestehende Zahlenmenge, sodass $\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}$ für $i \to \infty$ und für jedes i

(e) $$\mathcal{E}_i \prec E.$$

Es bezeichne ferner

$$P_n^{(i)}(x) = p_0^{(i)} x^n + p_1^{(i)} x^{n-1} + \cdots + p_n^{(i)}$$

das den Bedingungen (B) genügende Polynom n-ten Grades, welches in $\mathcal{E}_i$ am wenigsten von $f(x)$ abweicht, und $\mathcal{P}_n(x)$ sei ein solches Polynom in bezug auf E. Wegen (e) ist offenbar

$$\max_{x \prec \mathcal{E}_i} |f(x) - P_n^{(i)}(x)| \leqslant \max_{x \prec \mathcal{E}} |f(x) - \mathcal{P}_n(x)|.$$

Diese Ungleichung zeigt, dass alle Grössen

$$p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

beschränkt sind. Betrachtet man also $p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, \ldots, p_n^{(i)}$ als Koordinaten eines Punktes $M^{(i)}$ in einem $n+1$ — dimensionalen Raume, so ist die Punktmenge

(f) $$M^{(i)} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

beschränkt und hat also mindestens einen Grenzpunkt. Zum Beweise des Satzes genügt es offenbar zu zeigen, dass das Polynom

$$\Pi_n(x) = \pi_0 x^n + \pi_1 x^{n-1} + \ldots + \pi_n,$$

welches irgend einem Grenzpunkte

$$\mu(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$$

der Punktmenge (f) entspricht, den Bedingungen (B) genügt und in $\mathcal{E}$ am wenigsten von $f(x)$ abweicht; in der Tat dieses Polynom ist dann mit $P_n(x)$ identisch, die Punktmenge (f) hat somit nicht mehr als einen Grenzpunkt, und also gelten die gewünschten Gleichungen

$$\lim_{i \to \infty} p_m^{(i)} = p_m \qquad (m = 0, 1, \ldots, n).$$

Um diese Tatsachen zu beweisen, bezeichnen wir durch $M^{(i_k)}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ eine der Folge (f) gehörende Unterfolge, welche gegen den Grenzpunkt μ konvergiert, sodass

(g) $$\lim_{k \to \infty} p_m^{(i_k)} = \pi_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Da die Bedingungen (B) für jedes Polynom $P_n^{(i)}(x)$ erfüllt sind, so ist

$$p_0^{(i_k)} a_\lambda^{\,n} + p_1^{(i_k)} a_\lambda^{\,n-1} + \ldots + p_n^{(i_k)} = A_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, l)$$

und also wegen (g) genügt auch $\Pi_n(x)$ den Bedingungen (B). Um zu zeigen, dass $\Pi_n(x)$ in $\mathcal{E}$ am wenigsten von $f(x)$ abweicht, mit anderen Worten, dass

$$\max_{x \prec \mathcal{E}} |f(x) - \Pi_n(x)| = \max_{x \prec \mathcal{E}} |f(x) - P_n(x)| = L_n,$$

nehme ich den Gegenteil

(h) $$\max_{x \prec \mathcal{E}} |f(x) - \Pi_n(x)| = \Lambda_n > L_n$$

an. Wegen (g) gibt es ein solches K_1, dass für alle $k \geqslant K_1$

$$|p_m^{(i_k)} - \pi_m| < \frac{\Lambda_n - L_n}{4(n+1)} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

und also

(i) $$\max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |\Pi_n(x) - P_n^{(i_k)}(x)| < \frac{\Lambda_n - L_n}{4}$$

Beachtet man ferner, dass $\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}$ für $i \to \infty$ und dass die Funktionen $f(x) - P_n(x)$, $f(x) - \Pi_n(x)$ in den betrachteten Zahlenmengen wegen (e) und $\mathcal{E} \prec E$ stetig sind, so ergibt sich, dass für ein gewisses K_2 und alle $k \geqslant K_2$

$$\max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |f(x) - P_n(x)| < \max_{x \prec \mathcal{E}} |f(x) - P_n(x)| +$$

$$+ \frac{\Lambda_n - L_n}{4} = L_n + \frac{\Lambda_n - L_n}{4},$$

(k)

$$\max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |f(x) - \Pi_n(x)| > \max_{x \prec \mathcal{E}} |f(x) - \Pi_n(x)| -$$

$$- \frac{\Lambda_n - L_n}{4} = \Lambda_n - \frac{\Lambda_n - L_n}{4};$$

und da nach der Definition von $P_n^{(i_k)}(x)$:

$$\max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |f(x) - P_n^{(i_k)}(x)| \leqslant \max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |f(x) - P_n(x)|$$

so ist

$$\max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |P_n^{(i_k)}(x) - \Pi_n(x)| > \max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |f(x) - \Pi_n(x)| - \max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |f(x) - P_n^{(i_k)}(x)|$$

$$> \max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |f(x) - \Pi_n(x)| - \max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |f(x) - P_n(x)|.$$

Wegen (i) und (k) ist also für $k \geqslant \max\{K_1, K_2\}$

$$\frac{\Lambda_n - L_n}{4} > \max_{x \prec \mathcal{E}_{i_k}} |\Pi_n(x) - P_n^{(i_k)}(x)| > \Lambda_n -$$

$$- \frac{\Lambda_n - L_n}{4} - L_n - \frac{\Lambda_n - L_n}{4} = \frac{\Lambda_n - L_n}{2}$$

was unserer Voraussetzung (h) widerspricht. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 2. **Über asymptotischen Wert der besten Annäherung.** Die Aufgabe, dasjenige unter den Polynomen n-ten Grades vom gegebenen Typus zu finden, welches in $\mathcal{E}$ am wenigsten von $f(x)$ abweicht, bietet sehr grosse Schwierigkeiten und kann genau nur in wenigen speziellen Fällen gelöst werden. Für viele Fragen genügt es aber eine angenäherte Lösung dieser Aufgabe und dabei für grosse Werte des Exponenten n zu wissen. In solchen Fragen werden natürlich die Bedingungen (B) nicht für ein einziges n, sondern für viele oder sogar für alle n angegeben (dabei können die Grössen, welche in diese Bedingungen eintreten, von n abhängig sein; in folgenden wird dies, z. B., mit den $A_1, A_2, \ldots, A_l$ sein, während $a_1, a_2, \ldots, a_l$ von n unabhängig bleiben werden).

In dieser Arbeit werden wir uns hauptsächlich mit der Auffindung solcher asymptotischen Lösungen beschäftigen. Dazu stellen wir folgende Definition auf: das nach irgend einer Regel gebildete Polynom n-ten Grades $Q_n(x)$ gibt in bezug auf die Exponentenfolge

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$$

asymptotisch die beste in $\mathcal{E}$ Annäherung der Funktion $f(x)$, falls

$$\lim_{k \to \infty} \frac{E_{n_k}[f(x)]}{M_{n_k}} = 1,$$

wo

$$M_{n_k} = \max_{x \prec \mathcal{E}} |f(x) - Q_{n_k}(x)|.$$

Bei der asymptotischen Lösung vieler Aufgaben leistet grosse Dienste der Satz I. In der Tat, können wir ein den Bedingungen (B) genügendes Polynom n-ten Grades $Q_n(x)$ derart konstruieren, dass

$$\min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_{n-l+2}|\} = M_n(1 - \varepsilon_n),$$

$$\max_{x \prec \mathcal{E}} |f(x) - Q_n(x)| = M_n,$$

wo $\varepsilon_n \to 0$, falls n eine bestimmte Folge durchläuft, so zeigt die aus dem Satze I folgende Ungleichung

$$M_n(1-\varepsilon_n) \leqslant E_n[f(x)] \leqslant M_n,$$

dass für diese Exponentenfolge

$$\frac{E_n[f(x)]}{M_n} \to 1$$

und also dass $Q_n(x)$ asymptotisch die beste in $\mathcal{S}$ Annäherung der Funktion $f(x)$ in bezug auf diese Exponentenfolge liefert.

Diese Methode kann man, z. B., dann anwenden, wenn man das Polynom $Q_n(x)$ vom Grade n und vom betrachteten Typus konstruieren weis, welches in $\mathcal{S}$ am wenigsten von $f(x)+\psi_n(x)$ abweicht, wobei $f(x)$ die gegebene und $\psi_n(x)$ irgend eine a priori unbestimmte Funktion bezeichnet, welche der einzigen Bedingung genügen muss, dass die Grösse

$$\frac{\max\limits_{x \lesssim \mathcal{S}} |\psi_n(x)|}{E_n[f(x)+\psi_n(x)]} = \varepsilon_n$$

gegen Null konvergiert, falls n eine passende Folge durchläuft. In der Tat, ist $P_n(x)$ das Polynom der besten Annäherung für $f(x)$, so folgt aus den Ungleichungen

$$|f(x)-Q_n(x)| \leqslant |f(x)+\psi_n(x)-Q_n(x)| + |\psi_n(x)|,$$
$$|f(x)+\psi_n(x)-P_n(x)| \leqslant |f(x)-P_n(x)| + |\psi_n(x)|,$$

dass

$$\left|\frac{E_n[f(x)]}{E_n[f(x)+\psi_n(x)]} - 1\right| \leqslant \varepsilon_n.$$

In einfachsten Fällen kann man nach S. N. Bernstein bei dieser Methode mit einer passend gebildeten rationalen Funktion als $\psi_n(x)$ auskommen.

Ausser dieser Methode werden wir in einigen Fällen noch eine andere Methode anwenden. Diese besteht im folgenden: für $f(x)$ sei das Polynom der besten in $\mathcal{S}$ Annäherung unbekannt, aber es seien bekannt zwei Polynome $P_n'(x)$ und $P_n''(x)$, welche bzw. in den Zahlenmengen $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ am wenigsten von $f(x)$ abweichen, wobei

$$\mathcal{S}': \quad <-1, \alpha'>, <\beta', 1>,$$
$$\mathcal{S}'': \quad <-1, \alpha''>, <\beta'', 1>,$$

und die von n abhängenden und a priori unbekannten Grössen α', β', α'', β'' den Ungleichungen

$$\alpha' \leqslant \alpha, \quad \beta' \geqslant \beta, \quad \alpha'' \geqslant \alpha, \quad \beta'' \leqslant \beta$$

genügen (es wird natürlich vorausgesetzt, dass $f(x)$ noch in $\mathcal{E}''$ stetig bleibt und dass $a_1, a_2, \ldots, a_l$ noch ausserhalb $\mathcal{E}''$ liegen); haben $E_n'[f(x)]$ und $E_n''[f(x)]$ dieselbe Bedeutung für $\mathcal{E}'$ und $\mathcal{E}''$, wie $E_n[f(x)]$ für $\mathcal{E}$, so wird offenbar

$$E'_n[f(x)] \leqslant E_n[f(x)] \leqslant E''_n[f(x)];$$

gibt es also eine solche Exponentenfolge, für welche

$$E'_n[f(x)] = (1 - \varepsilon_n) E''_n[f(x)]$$

mit $\varepsilon_n \to 0$, so wird das Polynom der besten in $\mathcal{E}$ asymptotischen Annäherung für $f(x)$ in der Gestalt von $P_n''(x)$ erscheinen.

§ 3. **Über das Tschebyscheffsche Polynom n-ten Grades für $\mathcal{E}$.** Es sei $\mathfrak{M}$ irgend eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge in der komplexen x-Ebene. Mit dem Namen Tschebyscheffsches Polynom n-ten Grades für $\mathfrak{M}$ bezeichnet man dasjenige unter den Polynomen

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$$

(mit beliebigen komplexen Koeffizienten p_i), welches in $\mathfrak{M}$ am wenigsten von Null abweicht, d. h. in $\mathfrak{M}$ den kleinsten Maximum des absoluten Betrages hat. Diese kleinste Abweichung soll durch $\mathrm{m}_n(\mathfrak{M})$ oder kurz durch m_n bezeichnet werden. Es entsteht die Frage: wie hängt die Grösse m_n von den Eigenschaften der Punktmenge $\mathfrak{M}$ ab? Das allgemeinste hierzu gehörende Ergebniss wurde von M. Fekete[3] entdeckt, welcher bewiesen hat, dass

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{m_n}$$

existiert und dem transfiniten Durchmesser $\tau_{\mathfrak{M}}$ von $\mathfrak{M}$ gleich ist; dabei wird mit dem Namen transfiniter Durchmesser von $\mathfrak{M}$ der stets existierende Grenzwert der Zahlenfolge

$$d_n = \sqrt[\binom{n}{2}]{V_n} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

[3] M. Fekete. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Ztschr., Bd. 17, 1923, S. 228—249.

bezeichnet, wo V_n bedeutet den grössten Wert, den der absolute Betrag der Vandermondischen Determinante

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_\nu^{n-1}, x_\nu^{n-2}, \ldots, x_\nu, 1|$$

der n Grössen x_ν annehmen kann, wenn dieselben voneinander unabhängig sämtliche Punkte von $\mathfrak{M}$ durchlaufen.

Nun ist aber $\mathcal{E}$ auch eine gewisse Punktmenge in der x-Ebene; man kann also die allgemeinen Überlegungen auch auf diesen Fall anwenden. Bezeichnet $t_n(x;\ \mathcal{E})$ oder kürzer $t_n(x)$ das Tschebyscheffsche Polynom n-ten Grades für $\mathcal{E}$, so zeigt die Darstellung

$$t_n(x) = x^n - \{x^n - t_n(x)\},$$

dass die Aufgabe, $t_n(x)$ zu bestimmen, der Aufgabe äquivalent ist, das Polynom vom Grade $n-1$ zu finden, welches in $\mathcal{E}$ die beste Annäherung der Funktion x^n liefert. Diese Bemerkung erlaubt die Sätze der vorigen Paragraphen zur Auffindung der Tschebyscheffschen Polynome anzuwenden; dazu muss nur bewiesen werden, dass alle Koeffizienten des Polynoms $t_n(x) = t_n(x;\ \mathcal{E})$ reell sind. Dies aber kann man folgendermassen zeigen: wäre

$$t_n(x) = (x - a_1 - ib_1)(x - a_2 - ib_2) \ldots (x - a_n - ib_n),$$

so hätte das Polynom

$$P_n(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

in $\mathcal{E}$ kleineren Maximum des absoluten Betrages als $t_n(x)$, denn für $b_j \neq 0$ ist

$$\max_{x \gtrsim \mathcal{E}} (x - a_j)^2 < \max_{x \gtrsim \mathcal{E}} \{(x - a_j)^2 + b_j^2\} = \max_{x \gtrsim \mathcal{E}} |x - a_j - ib_i|^2;$$

also sind reell alle Wurzeln des Tschebyscheffschen Polynoms $t_n(x)$, sodass die Koeffizienten a fortiori reell sein müssen.

Ist $\mathfrak{M}$ ein Intervall der Länge h, so gelten, bekanntlich, folgende Formeln

$$\tau = \frac{h}{4}, \quad m_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{h}{2}\right)^n$$

sodass

$$m_n = 2\tau^n.$$

Später werden wir auch für $\mathcal{E}$, d. h. für zwei Intervalle, eine ähnliche, aber natürlich kompliziertere Verschärfung des Satzes von M. Fekete ableiten.

Wir wollen jetzt auf eine Verallgemeinerung der oben besprochenen Tschebyscheffschen Polynome, welche deshalb als Tschebyscheffsche Polynome im engen Sinne bezeichnet werden können, hinweisen. Dabei werden wir uns nur mit dem Falle $\mathfrak{M} = \mathcal{E}$ beschränken. Es sei $s(x)$ irgend eine stetige und in $\mathcal{E}$ nicht verschwindende reelle Funktion. Man betrachte die Gesamtheit aller reellen Polynome vom Grade n und mit dem höchsten Gliede x^n. Unter diesen Polynomen existiert ein, dessen Produkt mit $s(x)$ in $\mathcal{E}$ kleineren Maximum des absoluten Betrages hat, als das Produkt von $s(x)$ mit irgend einem anderen Polynom n-ten Grades und demselben höchsten Gliede. Dieser kleinste Wert des Maximum des absoluten Betrages sei durch $m_n[s(x)]$ bezeichnet und das ihm entsprechende Polynom $\bar{C}_n(x)$ möge als das Tschebyscheffsche in bezug auf die Belegungsfunktion $s(x)$ Polynom n-ten Grades für die Punktmenge $\mathcal{E}$ bezeichnet werden.

Besonders einfach und zugleich wichtig ist der Fall, in welchem die Belegungsfunktion auch ein Polynom von irgend welchem Grade l mit der Zahlenmenge $\mathcal{E}$ nicht angehörenden Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_l$ ist. Hier kann man leicht einen engen Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Tschebyscheffschen Polynomen und Fragen des ersten Paragraphs erkennen. In der Tat, hat die Belegungsfunktion die Gestalt

$$s_l(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_l),$$

so ist

$$P_{n+l-1}(x) = x^{n+l} - \bar{C}_n(x)\, s_l(x)$$

dasjenige den Bedingungen (B) mit

$$A_i = a_i^{n+l} \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

genügende Polynom $n + l - 1$-ten Grades, welches in $\mathcal{E}$ am wenigsten von der Funktion $f(x) = x^{n+l}$ abweicht.

II Kapitel

Herleitung einiger Hilfsformeln und Sätze

§ 4. **Über eine konforme Abbildung.** In diesem Paragraphen will ich eine im folgenden oft benutzte Transformation der Veränderlichen x einführen und für spätere Zwecke geometrisch als eine konforme Abbildung darstellen. Ich setze voraus, dass die Veränderliche x nicht nur reelle, sondern beliebige komplexe Werte haben kann, und nehme in der komplexen x-Ebene als

fundamentales Gebiet die Komplementärmenge G in bezug auf die Punktmenge $\mathcal{E}$; G ist ein zweifach zusammenhängendes Gebiet, dessen Modul $\varkappa\,(0 < \varkappa < 1)$ mittels der Formel

$$\varkappa^2 = \frac{2(\beta - \alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)} \tag{1}$$

definiert werden möge.

Es seien K und K' die vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung in bezug auf den Modul $\varkappa$ und auf den Komplementärmodul

$$\varkappa' = \sqrt{1-\varkappa^2}.$$

Ferner sei die Grösse ρ aus der Gleichung[4]

$$1 - 2sn^2\rho = \alpha \tag{2}$$

bei der Zusatzbedingung

$$-K < \rho < 0 \tag{3}$$

bestimmt.

Aus (1) und (2) folgt unmittelbar, dass

$$2\frac{cn^2\rho}{dn^2\rho} - 1 = \beta$$

oder

$$2sn^2(K+\rho) - 1 = \beta. \tag{4}$$

Nach diesen Vorbereitungen schreibe ich die erwähnte Transformation der Veränderlichen x in der Gestalt

$$x = \frac{sn^2u \cdot cn^2\rho + cn^2u \cdot sn^2\rho}{sn^2u - sn^2\rho}, \tag{5}$$

wo u die neue Veränderliche bedeutet. Dieser Transformation kann man mehrere andere Formen geben, unter denen später die folgenden eine Anwendung finden werden:

$$-x = \frac{sn^2(u+K)\,cn^2(\rho+K) + cn^2(u+K)\,sn^2(\rho+K)}{sn^2(u+K) - sn^2(\rho+K)}, \tag{5 bis}$$

$$x - \alpha = \frac{1-\alpha^2}{2sn^2u + \alpha - 1}, \quad x - \beta = \frac{1-\beta^2}{1+\beta - 2sn^2(u+K)}. \tag{6}$$

[4] Hier und im folgenden ist $sn\rho = sn(\rho;\varkappa)$, ..., falls der Modul der elliptischen Funktionen nicht explizite angeschrieben ist.

Um den geometrischen Sinn der Transformation (5) zu erklären, nehme ich das vermöge der Ungleichungen

$$-K < \Re u < 0, \quad -K' < \Re \frac{u}{i} < K'$$

definierte Rechteck Δ in der komplexen u-Ebene; die reelle Achse zerlegt Δ in zwei gleiche und symmetrische Hälften: das obere Rechteck und das untere

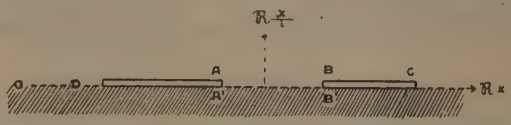


Fig. 1.

Rechteck. Eine leichte Überlegung zeigt, dass vermöge (5) das obere Rechteck auf die obere Hälfte und das untere Rechteck auf die untere Hälfte der

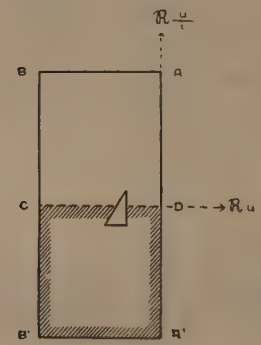


Fig. 2.

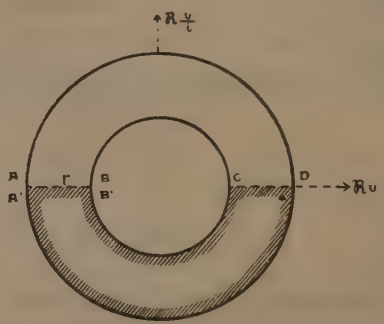


Fig. 3.

x-Ebene abgebildet werden. Auf den Figuren 1 und 2 sind die einander entsprechenden Punkte der beiden Ebenen mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Dem unendlich fernen Punkte der x-Ebene entspricht der Punkt $u = \rho$, welcher auf der Halbierungsstrecke des Gebietes Δ liegt. Ich setze ferner

$$u = \frac{K'}{\pi} \log v \tag{7}$$

bei der Zusatzbedingung: $u = 0$ für $v = 1$. Vermöge (7) wird das Rechteck Δ der u-Ebene auf das von den Kreisen

$$|v| = 1, \quad |v| = e^{-\pi \frac{K}{K'}} \tag{8}$$

begrenzte und längs AB (Fig. 3) zerschnittene Ringgebiet Γ der v-Ebene abgebildet. Es ist jetzt leicht zu erkennen, dass die Transformationen (5) und (7) nacheinander ausgeführt die konforme Abbildung des Gebietes G der x-Ebene auf das unzerschnittene Ringgebiet Γ der v-Ebene liefern. Es soll hier noch bemerkt werden, dass nach (5), (1), (2)

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = \frac{4(x^2-1)(x-\alpha)(x-\beta)}{(1-\alpha)(1+\beta)}. \tag{9}$$

§ 5. Über einige mit der betrachteten Abbildung zusammenhängenden Funktionen. Ich nehme irgend eine den Ungleichungen

$$-K < r < 0, \quad -K' \leqslant s \leqslant K'$$

genügende komplexe Zahl $t = r + is$ und betrachte die vermöge ihr gebildete Funktion

$$Z(u, t) = \frac{H(u-t)}{H(u+t)},$$

wo

$$H(w) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi w}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi w}{2K} + \cdots$$

die bekannte Jacobische Theta-Funktion ist. Die Funktion $Z(u, t)$ ist in Δ regulär, und da sie in gegenüberliegenden Punkten der Strecken AB und $A'B'$ verschiedene Werte annimmt, welche nur dem absoluten Betrage nach gleich sind, so ist $Z(u, t)$ als Funktion von v vermöge (7) betrachtet in dem Gebiete Γ nicht eindeutig, aber regulär; dabei ist $|Z(u, t)|$ auch in Γ eindeutig und stetig. Die Funktion $Z(u, t)$ verschwindet nur in einem Punkte des Gebietes Γ und hat auf den Kreislinien (8), welche Γ begrenzen, den absoluten Betrag Eins. Daraus geht hervor, dass $Z(u, t)$ im Innern des Ringes Γ dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins bleibt, denn jeder Zweig von $Z(u, t)$ ist an jeder Stelle des Ringes regulär.

Ist also

$$-K < \Re u < 0, \quad -K < r < 0,$$

so gilt die Ungleichung

$$\left|\frac{H(u-r)}{H(u+r)}\right| < 1, \tag{10}$$

aus welcher auch

$$\left|\frac{\theta(u-r)}{\theta(u+r)}\right| < 1 \tag{11}$$

folgt.[5]

Die Funktion $Z(u, t)$ kann als die komplexe Greensche Funktion für den Ring Γ in bezug auf den Punkt $t = r + is$ bezeichnet werden.[6] In der Tat:

1°. $Z(u, t)$ ist in Γ regulär.

2°. $|Z(u, t)|$ ist in Γ eindeutig und stetig.

3°. $Z(u, t)$ hat in Γ nur eine Nullstelle (erster Ordnung) $v = e^{\pi\frac{t}{K'}}$.

4°. Auf dem Rande des Gebietes Γ, d. h. auf den Kreislinien (8), hat $Z(u, t)$ den absoluten Betrag Eins

und diese Eigenschaften zeigen, dass $\Re \log Z(u, t)$ mit der gewöhnlichen Greenschen Funktion für den Ring Γ in bezug auf den Punkt mit den Kartesischen Koordinaten r, s identisch ist.

Nun wollen wir vermöge der Funktion $Z(u, t)$ als Elements die Funktion

$$\Phi(u) = \varepsilon Z(u, t_1) \ldots Z(u, t_M) Z(-u, \bar{t}_{M+1}) \ldots Z(-u, \bar{t}_{M+N}) \tag{a}$$

bilden, wo ε eine Konstante vom absoluten Betrage Eins ist und

$$t_j = r_j + is_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, M+N)$$

gegebene komplexe Zahlen bedeuten, welche folgenden Forderungen genügen:

1°. Die reellen Teile r_j $(-K < r_j < 0)$ befriedigen die Gleichung

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_M - r_{M+1} - r_{M+2} - \cdots - r_{M+N} = pK, \tag{b}$$

wo p ganz ist.

2°. Die Zahlen s_j sind numerisch nicht grösser als K'.

[5] Man könnte die Ungleichungen (10) und (11) auch aus der Produktdarstellung der Theta-Funktionen

$$\frac{\theta(\xi)}{\theta(\eta)} = \frac{\left(1 - 2q\cos\frac{\pi\xi}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi\xi}{K} + q^6\right)\cdots}{\left(1 - 2q\cos\frac{\pi\eta}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi\eta}{K} + q^6\right)\cdots}$$

ableiten.

[6] Vgl. H. Weber. Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, V Aufl., 1910, Bd. I, S. 367.

3°. Diejenigen unter den Grössen $t_1, t_2, \ldots, t_M$ (bzw. $t_{M+1}, \ldots, t_{M+N}$), für welche die imaginären Teile von Null und $\pm K'$ verschieden sind, sind paarweise konjugiert komplex.

Aus (b) folgt unmittelbar, dass

$$\Phi(u \pm 2K) = \Phi(u \pm 2iK') = \Phi(u). \tag{c}$$

Die Gleichungen (c) gelten für beliebiges ε; schreibt man aber dieser Grösse einen völlig bestimmten Wert zu, so wird, wie wir jetzt zeigen wollen, noch die Gleichung

$$\Phi(-u) = \frac{1}{\Phi(u)} \tag{d}$$

erfüllt sein. In der Tat, für ein reelles t_1 ist

$$Z(-u, t_1) = \frac{1}{Z(u, t_1)}; \tag{e}$$

für ein nicht reelles $t_1 = r_1 \pm is_1$ und $|s_1| < K'$ kann man annehmen, dass $t_2 = \bar{t}_1 = r_1 - is_1$, und da

$$Z(-u, \bar{t}) = \frac{1}{Z(u, t)}$$

so ist

$$Z(-u, t_1) Z(-u, t_2) = Z(-u, \bar{t}_2) Z(-u, \bar{t}_1) = \frac{1}{Z(u, t_2) Z(u, t_1)}; \tag{f}$$

endlich für $t_1 = r_1 \pm iK'$ ist

$$Z(-u, t_1) = e^{\mp 2\pi i \frac{r_1}{K}} \cdot \frac{1}{Z(u, t_1)}; \tag{g}$$

die Beziehungen (e), (f), (g) zeigen, dass

$$Z(-u, t_1) \ldots Z(-u, t_M) Z(u, \bar{t}_{M+1}) \ldots Z(u, \bar{t}_{M+N}) = \\ = \frac{C}{Z(u, t_1) \ldots Z(u, t_M) Z(-u, \bar{t}_{M+1}) \ldots Z(-u, \bar{t}_{M+N})}$$

wo C eine bestimmte Konstante vom absoluten Betrage Eins bedeutet; ist also $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{C}}$ gesetzt (was wir stets voraussetzen wollen), so wird wirklich die Formel (d) bestehen.

Die so definierte Funktion $\Phi(u)$ besitzt im Gebiete Γ folgende Eigenschaften:

1°. $\Phi(u)$ verschwindet für $v = e^{\pi \frac{i_\lambda}{K'}}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, M)$ und wird unendlich für $v = e^{\pi \frac{i_\lambda}{K'}}$ $(\lambda = M+1, M+2, \ldots, M+N)$;

2°. Auf den Kreislinien (8), welche Γ' begrenzen, hat $\Phi(u)$ den absoluten Betrag Eins;

3°. Auf AB und CD (Fig. 3) ist $\Phi(u)$ reell.

Die zwei ersten Eigenschaften sind klar. Um die dritte Eigenschaft zu beweisen, bemerken wir, dass $\Phi(u)$ als Produkt von nur solchen Faktoren dargestellt werden kann, welche die Form

$$\frac{H(u-A)}{H(u+A)}, \quad \frac{H(u-C)\,H(u-\bar{C})}{H(u+\bar{C})\,H(u+C)}, \quad \frac{\theta(u-B)}{\theta(u+B)}$$

haben, wo C komplex und A, B reell sind. Aber alle diese Faktoren sind auf CD reell, also ist reell auf CD auch $\Phi(u)$; daher ist für reelles w

$$\Phi(w+iK') = \overline{\Phi(w-iK')},$$

aber wegen der Periodizität der Funktion $\Phi(u)$ gilt die Gleichung

$$\Phi(w+iK') = \Phi(w-iK');$$

der Vergleich dieser Beziehungen zeigt, dass

$$\Phi(w-iK') = \overline{\Phi(w-iK')},$$

was unserer Behauptung äquivalent ist.

Aus den Gleichungen (c) und (d) folgt, dass die Funktion

$$\frac{1}{2}\{\Phi(u)+\Phi(-u)\}$$

rational von der ursprünglichen Veränderlichen x abhängt. Wir wollen diese Funktion durch $r(x)$

$$r(x) = \frac{1}{2}\{\Phi(u)+\Phi(-u)\}$$

bezeichnen und eine ihre Eigenschaft, welche später oft angewandt wird, ableiten.

Zunächst bemerken wir, da die Punktemenge $\mathcal{E}$ der x-Ebene bei der Abbildung (5), (7) in den Rand des Gebietes Γ übergeht, dass der grösste

Wert, welchen $|r(x)|$ in $\mathcal{E}$ annehmen kann, gleich Eins ist. Um die erwähnte Eigenschaft der Funktion $r(x)$ zu erhalten, wollen wir die Gesamtanzahl der Stellen der Punktmenge $\mathcal{E}$ bestimmen, in welchen $r(x)$ den maximalen Wert Eins mit abwechselnden Vorzeichen annimmt. Bei dieser Rechnung haben eine besondere Bedeutung diejenigen unter den Grössen t_j, deren imaginäre Teile $\pm K'$ gleich sind; ohne die Allgemeinheit zu beschränken nehmen wir an, dass diese Eigenschaft aus den Grössen $t_1, t_2, \ldots, t_M$ den ersten M_0 und aus den Grössen $t_{M+1}, t_{M+2}, \ldots, t_{M+N}$ den ersten N_0 zukommt. Die den Grössen

$$t_1, t_2, \ldots, t_{M_0}, t_{M+1}, t_{M+2}, \ldots, t_{M+N_0}$$

entsprechenden Punkte des Gebietes Γ liegen auf AB und mögen durch

(h) $$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{M_0}, \zeta_{M+1}, \zeta_{M+2}, \ldots, \zeta_{M+N_0}$$

bezeichnet werden. Wir umgeben jeden dieser Punkte mit einem genügend kleinen Kreise ω_j, der bis auf den Mittelpunkt ζ_j keinen weiteren der Punkte (h) enthält und keinen weiteren der Kreise $\omega_1, \omega_2, \ldots$ trifft. Die Kreislinien ω_j und den Rand des Gebietes Γ verbinden wir mit Strecken der negativen reellen Achse, so dass ein einfach zusammenhängendes Gebiet Γ' entsteht (Fig. 4). Nun wollen wir die Berandung des Gebietes Γ' einmal im positiven Sinne umgehen.

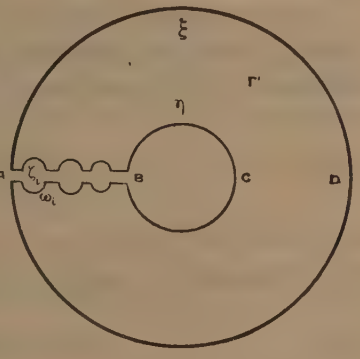


Fig. 4.

Das Argument der Funktion $\Phi(u)$ erfährt dabei die Vergrösserung $2\pi(M - M_0 - N + N_0)$. Da in Punkten D, A, B, C die Funktion $\Phi(u)$ reell ist, so kann man die Änderungen von $\arg \Phi(u)$, falls v die Halbkreise $D\xi A$ und $B\eta C$ umgeht, mit $m\pi$ bzw. $n\pi$ bezeichnen, wo m und n ganz sind. Dann zeigt eine leichte Überlegung, dass

$$\pi(2m + 2n - 2M_0 + 2N_0) = 2\pi(M - M_0 - N + N_0)$$

oder

(i) $$m + n = M - N$$

und

(k) $$\Phi(iK') = (-1)^{N_0+M_0}\Phi(-K + iK').$$

Nimmt $\Phi(u)$ in irgend einem Randpunkte des Gebietes Γ den Wert ± 1 an, so ist in dem entsprechenden Punkte der Menge $\mathfrak{E}$: $r(x) = \pm 1$. Un da in symmetrisch in bezug auf die reelle Achse gelegenen Punkten des Randes von Γ die Veränderliche x gleiche Werte hat, so folgt aus dem oben gesagten, dass $r(x)$ den Wert Eins mit abwechselnden Vorzeichen in $|m|+1=\mu$ aufeinander folgenden Punkten des Intervalls $<-1, \alpha>$ und in $|n|+1=\nu$ solchen Punkten des Intervalls $<\beta, 1>$ annimmt. Dabei ist nach (i)

$$\mu+\nu=|m|+|n|+2 \geqslant |M-N|+2 \tag{l}$$

und nach (k)

$$r(\beta)=r(\alpha)\cdot(-1)^{M_0+N_0}=\pm 1. \tag{m}$$

Als fundamentale Eigenschaft der rationalen Funktion $r(x)$ werden wir gerade die hier abgeleiteten Beziehungen (l) und (m) bezeichnen.

§ 6. **Erweiterung eines Satzes von S. Bernstein.** Die Bezeichnungen des vierten Paragraphs beibehaltend, betrachten wir in der x-Ebene den geometrischen Ort derjenigen Punkte, für welche

$$\left|\frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)}\right| = R, \tag{a}$$

wo R eine der Ungleichung $R \geqslant 1$ genügende Konstante bedeutet. Für $R=1$ besteht der geometrische Ort (a) aus den Intervallen

$$<-1, \alpha>, <\beta, 1>, \tag{b}$$

d. h. aus dem Rande des Gebietes G.

Für genügend wenig von 1 unterscheidendes $R > 1$ wird (a) aus zwei getrennten und die Intervallen (b) umschliessenden Ovalen bestehen, Wenn wir also zur Abkürzung der Rede den geometrischen Ort (a) als N-Kurve und R als Parameter dieser N-Kurve bezeichnen, so können wir sagen, dass für genügend kleines $R-1>0$ die N-Kurve aus zwei getrennten geschlossenen Zweigen bestehen wird. Beachtet man, dass für $R=\infty$ die N-Kurve sich auf den einzigen Punkt $x=\infty$ zusammenzieht, so ergibt sich, dass für genügend grosse Werte des Parameters R die N-Kurve die Gestalt eines einzigen die beiden Intervallen (b) umschliessenden Ovals haben muss. Zwi-

schen den N-Kurven der ersten und zweiten Art liegt offenbar eine solche N-Kurve, welche die Form einer Lemniskate hat und einen zwischen α und β gelegenen Doppelpunkt γ besitzt. Dieser N-Kurve möge der Parameter R_0 angehören. Um R_0 zu finden, wollen wir auf jeder N-Kurve diejenigen Punkte bestimmen suchen, welche im Intervalle (α, β) liegen. Beachtet man, dass für ein in (α, β) liegendes x die Grösse u den Wert $u = iK' + t$ hat, wo $-K < t < 0$, so ergibt sich für die gesuchten Punkte die Gleichung

$$\frac{\theta(t+\rho)}{\theta(t-\rho)} = R.$$

Ändert sich t von O bis $-K$, so wird die Funktion $\frac{\theta(t+\rho)}{\theta(t-\rho)}$ zunächst wachsen vom Werte 1 bis auf einen bestimmten Wert

(c) $$\max_{-K<t<0} \frac{\theta(t+\rho)}{\theta(t-\rho)} = \frac{\theta(t_0+\rho)}{\theta(t_0-\rho)} = \frac{\theta'(t_0+\rho)}{\theta'(t_0-\rho)}$$

und dann zurück bis auf den Wert 1 abnehmen. Es ist leicht zu sehen, dass für $R > \frac{\theta(t_0+\rho)}{\theta(t_0-\rho)}$ kein Punkt der N-Kurve zwischen α und β liegen kann, während es für $R < \frac{\theta(t_0+\rho)}{\theta(t_0-\rho)}$ genau zwei solche Punkte gibt. Dem Werte[7]

[7] Um eine grobe Abschätzung für R_0 zu erhalten, bemerke man, dass

$$\theta(t_0+\rho) < \theta_1(0),\ \theta(t_0-\rho) > \theta(0);$$

daraus folgt, dass

$$R_0 < \frac{\theta_1(0)}{\theta(0)} = \sqrt[4]{\frac{(1-\alpha)(1+\beta)}{(1+\alpha)(1-\beta)}}.$$

Für den Speziellfall $\alpha = -\beta$ $(\beta > 0)$ gilt die genaue Gleichung

$$R_0 = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Setzt man in diesem Falle $x = x_1 + ix_2$, so haben die N-Kurven die Gestalt

$$\left[\frac{x_1^2 - x_2^2 - \frac{1+\alpha^2}{2}}{R^2 + \frac{1}{R^2}}\right]^2 + \frac{4x_1^2 x_2^2}{\left(R^2 - \frac{1}{R^2}\right)^2} = \left(\frac{1-\alpha^2}{4}\right)^2.$$

(d) $$R = R_0 = \frac{\theta(t_0 + \rho)}{\theta(t_0 - \rho)}$$

entspricht also diejenige N-Kurve, welche die Form einer Lemniskate hat Es ist leicht den Doppelpunkt dieser lemniskatischen N-Kurve, d. h. die Grösse γ, zu bestimmen. In der Tat, aus (5), (1) und (2) folgt, dass[4]

(e) $$\frac{2}{\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)}}\left[x - \alpha - \frac{2sn\rho \cdot cn\rho}{dn\rho}\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)}\right] = \frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)} - \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)} = \frac{\theta'(u - iK' + \rho)}{\theta(u - iK' + \rho)} - \frac{\theta'(u - iK' - \rho)}{\theta(u - iK' - \rho)},$$

wo $\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)} > 0$, und da für den Doppelpunkt der lemniskatischen N-Kurve:

$$x = \gamma, \quad u = iK' + t_0, \quad \frac{\theta(t_0+\rho)}{\theta(t_0-\rho)} = \frac{\theta'(t_0+\rho)}{\theta'(t_0-\rho)},$$

so ist[8]

(12) $$\gamma = \alpha + \frac{2sn\rho \cdot cn\rho}{dn\rho}\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)}.$$

Das ist die Gleichung zur Bestimmung der Grösse γ. Für spätere Zwecke soll hier noch die Formel (e) in der Gestalt

(13) $$\frac{2(x-\gamma)}{\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)}} = \frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)} - \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)}$$

dargestellt werden.

[8] Es ist leicht direkt zu zeigen, dass die vermöge (12) definierte Grösse γ zwischen α und β gelegen ist. In der Tat, aus den bekannten Produkt-Darstellungen der Theta-Funktionen folgt, dass für $-K < \rho < 0$

$$\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)} < 0, \quad \frac{\theta'_1(\rho)}{\theta_1(\rho)} > 0$$

und also wegen

$$\theta_1(\rho) = \frac{1}{\sqrt{x'}} dn\rho \cdot \theta(\rho)$$

ist

$$\frac{x^2\, sn\rho \cdot cn\rho}{dn\rho} < \frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)} < 0$$

oder nach (1), (2), (4)

$$0 < \frac{2sn\rho \cdot cn\rho}{dn\rho}\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)} < \beta - \alpha$$

so dass wirklich

$$\alpha < \alpha + \frac{2sn\rho \cdot cn\rho}{dn\rho}\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)} < \beta.$$

Die folgende Erweiterung eines Satzes über Polynome von S. Bernstein[9] zeigt, dass in bezug auf $\mathcal{E}$ die N-Kurven eine solche Rolle spielen, wie die homofokalen Ellipsen in bezug auf eine Strecke.

Satz IV. Ist $P_n(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit beliebigen komplexen Koeffizienten und besteht in $\mathcal{E}$ die Ungleichung

$$|P_n(x)| \leqslant M,$$

so ist in jedem ausserhalb von $\mathcal{E}$ gelegenen Punkte z die Ungleichung

$$|P_n(z)| < MR^n$$

erfüllt, wobei R den Parameter derjenigen N-Kurve bedeutet, welche durch den Punkt z hindurchgeht, d. h.

$$R = \left|\frac{H(w+\rho)}{H(w-\rho)}\right|,$$

wo

$$z = \frac{sn^2 w \cdot cn^2 \rho + cn^2 w \cdot sn^2 \rho}{sn^2 w - sn^2 \rho}.$$

Beweis. Man betrachte im Gebiete G die Funktion

$$\varphi(x) = \frac{P_n(x)}{\left[\frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)}\right]^n}.$$

Diese Funktion ist in jedem inneren Punkte von G (und auch im Unendlichen) regulär analytisch; ferner hat sie in G einen eindeutigen absoluten Betrag. Daher erreicht der absolute Betrag von $\varphi(x)$ seinen grössten Wert auf $\mathcal{E}$, d. h. auf dem Rande von G.

Nun ist aber auf $\mathcal{E}$ der Nenner von $\varphi(x)$ absolut gleich Eins, während der Zähler dem Betrage nach nicht grösser als M; mithin ist auf $\mathcal{E}$

$$|\varphi(x)| \leqslant M.$$

Diese Ungleichung muss daher für jedes x gelten, da aber für $n > 0$ der Nenner vor $\varphi(x)$ kein Polynom ist, so ist $\varphi(x)$ keine Konstante. Mithin ist für jedes z, welches ausserhalb von $\mathcal{E}$ liegt

$$|\varphi(z)| < M$$

[9] S. Bernstein. Leçons sur les propriétés extrémales... p. 112; S. Bernstein. Sur une propriété des polynomes. Bul. de la Soc. Math. de Kharkoff, vol. 14; M. Riesz. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein. Acta Mathematica, 1916, Bd. 40, S. 337—347.

oder

$$|P_n(z)| < M\left|\frac{H(w+\rho)}{H(w-\rho)}\right|^n = MR^n$$

was zu beweisen war.

Folgerung. Es seien $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zwei reelle Funktionen, von welchen die erste in $<-1, \alpha>$ und die zweite in $<\beta, 1>$ definiert sind. Bedeutet $F(x)$ die Funktion $f_1(x)$, falls $-1 \leqslant x \leqslant \alpha$, und $f_2(x)$, falls $\beta \leqslant x \leqslant 1$, und ist für alle genügend grosse n

$$E_n[F(x)] < C\delta^n,$$

wo $\delta < \frac{1}{R_0}$ und C von n nicht abhängt, so sind beide Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ innerhalb einer gewissen N-Kurve mit dem Parameter $R > R_0$ regulär und die eine von diesen Funktionen ist eine analytische Fortsetzung der anderen.

Beweis. Bezeichnet $P_n(x)$ das in $\mathcal{E}$ von $F(x)$ am wenigsten abweichende Polynom n-ten Grades, so ist der Voraussetzung des Satzes zufolge

$$\max_{x \prec \mathcal{E}} |F(x) - P_n(x)| < C\delta^n \tag{f}$$

und also besteht in $\mathcal{E}$ die Ungleichung

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < 2C\delta^{n-1}. \tag{g}$$

Man nehme jetzt irgend ein der Ungleichung

$$\delta < \frac{1}{R} < \frac{1}{R_0} \tag{h}$$

genügendes R und man betrachte die N-Kurve mit dem Parameter R. Wegen (h) besteht diese N-Kurve aus einem Zweige und somit begrenzt ein einfach zusammenhängendes die Intervallen (b) enthaltendes Gebiet g_R. Nach dem Satze IV besteht in g_R die Ungleichung

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < 2CR(R\delta)^{n-1},$$

und da $\delta R < 1$, so konvergiert die Reihe

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + [P_3(x) - P_2(x)] + \ldots \tag{i}$$

in g_R gleichmässig; mithin stellt die Reihe (i) eine in g_R reguläre analytische Funktion dar. Diese Funktion stimmt in $<-1, \alpha>$ mit $f_1(x)$ und in $<\beta, 1>$ mit $f_2(x)$ überein. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 7. **Zwei Hilfssätze.** In diesem Paragraphen will ich zwei Hilfssätze zusammenstellen, um im folgenden bei dem Beweise einiger Sätze die Unterbrechung des leitenden Gedanken zu vermeiden.

Hilfssatz I. Es sei K das vollständige elliptische Integral erster Gattung in bezug auf den Modul k und t ein von k unabhängiger positiver echter Bruch; k sei als unabhängige im Intervalle

$$\text{(a)} \qquad \vartheta_1 < k < \vartheta_2 \qquad (0 < \vartheta_1, \vartheta_2 < 1$$

gelegene Veränderliche betrachtet. Bezeichnet N eine naturale Zahl und

$$D = D(k)$$

eine reelle Funktion von k, welche in (a) samt ihrer Ableitung beschränkt ist, so besteht für genügend grosse N die Ungleichung

$$\frac{d\varphi}{dk} = \frac{d}{dk} sn\left(tK + \frac{D}{N};\ k\right) > \omega$$

mit einem positiven und nur von t, ϑ_1, ϑ_2 abhängenden ω.

Beweis. Aus

$$t\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{D(k)}{N} = \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

folgt, dass

$$t\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \frac{kx^2}{1-k^2x^2} + \frac{D'(k)}{N} = \frac{d\varphi}{dk} \frac{1}{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}} +$$

$$+ \int_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \frac{kx^2}{1-k^2x^2}$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dk} = \frac{\sqrt{(1-\varphi^2)(1-k^2\varphi^2)}}{k} \left\{ \frac{1}{k^2-1} \frac{\theta_1'\left(tK + \frac{D}{N}\right)}{\theta_1\left(tK + \frac{D}{N}\right)} + \frac{kD'(k)}{N} + \right.$$

$$\left. + \frac{D(k)}{(k^2-1)N}\left[k^2 - \frac{\theta''(0)}{\theta(0)}\right] \right\}.$$

Für genügend grosse N ist somit

$$\frac{d\varphi}{dk} > \frac{cn(tK;k)\cdot dn(tK;k)}{2k(k^2-1)}\,\frac{\theta_1'(tK)}{\theta_1(tK)};$$

da aber

$$-\frac{\theta_1'(tK)}{\theta_1(tK)} = \frac{2\pi\sin\pi t}{K}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q^{2i-1}}{1+2q^{2i-1}\cos\pi t+q^{2(2i-1)}} > \frac{\pi q\sin\pi t}{2K(1-q^2)},$$

so ist für genügend grosse N

$$\frac{d\varphi}{dk} > \frac{\pi\sin\pi t}{8(1-\vartheta_1)\vartheta_2}\cdot\min_{\vartheta_1\leqslant k\leqslant\vartheta_2}\frac{q\cdot cn(tK;k)\cdot dn(tK;k)}{K(1-q^2)} = \omega.$$

Hilfssatz II. Es seien $\sigma=\sigma(n)$ und $\psi=\psi(n)$ zwei Funktionen der ganzzahligen Veränderlichen n, wobei für jedes n die Ungleichung $-K<\sigma\leqslant 0$ erfüllt ist. Der somit zwischen σ und ψ bestehende Zusammenhang sei derart, dass $\psi(n)\to 1$, falls n jede solche ins Unendliche wachsende Folge durchläuft, für welche eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
&1^0.\quad \sigma=0,\\
&2^0.\quad \sigma\to 0,\\
&3^0.\quad \sigma\to -K,\\
&4^0.\quad -K+\delta<\sigma<-\delta
\end{aligned}$$

mit einen beliebigen von n unabhängigen positiven δ.

Dann ist $\psi(n)\to 1$ für jede ins Unendliche wachsende Folge.

Beweis. Zum Beweise nehmen wir den Gegenteil an, nähmlich, es existiere eine positive Zahl η und eine solche unendliche Folge

(b) $$n_1,\ n_2,\ n_3,\ldots,$$

dass

$$|\psi(n_i)-1|\geqslant\eta \qquad (i=1,2,3,\ldots).$$

Den Zahlen (b) entsprechen bestimmte Werte der Grösse σ:

(c) $$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots$$

Da für alle σ_i die Ungleichung $-K<\sigma_i\leqslant 0$ erfüllt ist, so muss die Folge (c) mindestens eine solche unendliche Unterfolge

(d) $$\sigma_1',\ \sigma_2',\ \sigma_3',\ldots$$

enthalten, für welche eine der vier Bedingungen des Satzes erfüllt wird. Der Folge (d) entspricht eine Unterfolge in bezug auf (b):

$$n_1', \; n_2', \; n_3' \ldots,$$

für welche wegen der Voraussetzung des Satzes

$$\lim_{i \to \infty} \psi(n_i') = 1,$$

sodass nicht für alle n_i' und destoweniger für alle n_i die Ungleichung

$$|\psi(n_i) - 1| \geqslant \eta$$

bestehen kann. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

III Kapitel

Über eine Klasse ganzer rationalen Funktionen

§ 8. Definition der Polynome $T_n(x;\ m,\ k)$ und ihre Eigenschaften. In diesem Kapitel werden wir uns beschäftigen mit einer Verallgemeinerung der bekannten trigonometrischen Polynome:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x = x^n - \frac{n}{4} x^{n-2} + \ldots,$$

welche auch mit dem Namen Tschebyscheffsche Polynome oft genannt werden. Unter vielen bemerkenswerten Eigenschaften dieser Polynome am wichtigsten sind die folgenden:

1°. Für Polynome $T_n(x)$ gelten die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-1}^{1} T_m(x) \cdot T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad (m \neq n;\ m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2°. Unter allen Polynomen mit dem höchsten Gliede x^n weicht $T_n(x)$ im Intervalle $< -1, 1 >$ am wenigsten von Null ab.

Gerade diese zweite Eigenschaft wollen wir bei den folgenden Verallgemeinerungen in Betracht ziehen.

Führt man anstatt x die neue Veränderliche v vermöge der Formel

(a) $$x = \frac{1}{2}\left(v + \frac{1}{v}\right)$$

ein, so nimmt $T_n(x)$ die Gestalt

$$T_n(x) = \frac{1}{2^n}\left(v^n + \frac{1}{v^n}\right) \tag{b}$$

an. Die parametrische Darstellung (a), (b) zeigt, wie geometrische Elemente in die Konstruktion der Polynome $T_n(x)$ eintreten; in der Tat, (a) gibt die konforme Abbildung der längs der Strecke $-1, +1$ aufgeschlitzten x-Ebene auf den Einheitskreis der v-Ebene, wobei $x = \infty$ in $v = 0$ übergeht, und v in der Formel (b) kann man als die komplexe Greensche Funktion für den Einheitskreis $|v| = 1$ gerade in bezug auf den Punkt $v = 0$ ansehen. Man könnte zeigen, dass in vielen Fragen über Funktionen minimaler Abweichung diese geometrischen Mitteln nicht zufällig sind, sondern notwendig und ganz natürlich eine Anwendung finden müssen. Wir werden aber nicht darauf stehen bleiben und wollen direkt zur den Gegenstand dieses Kapitels bildenden Verallgemeinerung übergehen; nähmlich, wir führen in unsere Betrachtung die Funktionen $T_n(x;\ m,\ k)$ ein, welche vermöge der Formeln

$$T_n(x;\ m,\ k) = \frac{L}{2}\left\{\left[\frac{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}\right]^n + \left[\frac{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)}\right]^n\right\}, \tag{14_1}$$

$$x = \frac{sn^2 u \cdot cn^2 \frac{m}{n}K + cn^2 u\, sn^2 \frac{m}{n}K}{sn^2 u - sn^2 \frac{m}{n}K}, \tag{14_2}$$

$$L = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{\theta(0)\,\theta_1(0)}{\theta\left(\frac{m}{n}K\right)\theta_1\left(\frac{m}{n}K\right)}\right]^{2n} \tag{14_3}$$

definiert werden, wobei der Modul k irgend einen dem Intervalle

$$0 \leqslant k < 1$$

angehörenden Wert[10] hat und m einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n-1$ gleich ist. Es ist leicht zu sehen, dass $T_n(x;\ m,\ k)$ nach ähnlichem Gesetze, wie $T_n(x)$, gebildet ist; in der Tat, setzt man

$$a = 1 - 2sn^2 \frac{m}{n}K, \tag{15_1}$$

[10] In diesem Kapitel hat der Modul aller elliptischen Funktion den Wert k und wird als unabhängige Veränderliche betrachten. Zur Abkürzung schreiben wir k in den Formeln nicht an.

$$(15_2) \qquad b = 2sn^2 \frac{n-m}{n} K - 1,$$

$$(c) \qquad u = \frac{K'}{\pi} \log v$$

und errinert man die im § 4 untersuchte Abbildung, so ergibt sich, dass die Formeln (14_2) und (c) die konforme Abbildung der längs der Strecken

$$< -1, a >, \ < b, 1 >$$

zerschnittenen x-Ebene auf ein gewisses Ringgebiet der v-Ebene liefern, während

$$\frac{H\left(u + \frac{m}{n} K\right)}{H\left(u - \frac{m}{n} K\right)}$$

die komplexe Greensche Funktion für dieses Ringgebiet ist und zwar in bezug auf denjenigen Punkt des Ringes, welcher dem Punkte $x = \infty$ entspricht. Der Übergang von $T_n(x)$ zu $T_n(x; m, k)$ kann also als Übergang von einem einfach zusammenhängenden zu einem gewissen zweifach zusammenhängenden Schlitzgebiete betrachtet werden. Dabei werden die Tatsachen natürlich viel komplizierter, was auch darin den Grund hat, dass alle einfach zusammenhängenden Gebiete im Sinne der Abbildung untereinander äquivalent sind, während jedes zweifach zusammenhängende Gebiet einen Modul besitzt. Darum mussten wir bei der Definition der Funktionen $T_n(x; m, k)$ nicht von den Zahlen a, b, sondern von dem Modul k ausgehen. In der Tat, die Formeln (14_2), (15_1), (15_2) unterscheiden sich von den Formeln (5), (2), (4) nur dadurch, dass die oben eingeführte Grösse ρ hier den Wert $-\frac{m}{n} K$ hat, und das ist für uns wichtig, wie wir es später sehen werden; wären aber a priori nicht der Modul k, sondern die Zahlen a, b vorgeschrieben, so könnte ρ einen von $-\frac{m}{n} K$ verschiedenen Wert erhalten.

Satz A. $T_n(x; m, k)$ ist in bezug auf sein erstes Argument ein Polynom vom Grade n mit dem höchsten Gliede x^n.

Beweis. Die Darstellung (14_1) zeigt, dass $T_n(x; m, k)$ eine gerade Funktion mit den Perioden $2K$ und $2iK'$ von u ist und also wegen (14_2) rational von x abhängt. Da aber $T_n(x; m, k)$ wegen (14_1) und (14_3) nur dann unendlich wird, wann $x = \infty$, so ist $T_n(x; m, k)$ ein Polynom. Aus (14_3) folgt aber leicht, dass

$$(16) \qquad T_n(x; m, k) = x^n - n\tau_1 x^{n-1} + \ldots,$$

wo

$$\tau_1 = -1 + \frac{2sn\frac{m}{n}K \cdot cn\frac{m}{n}K}{dn\frac{m}{n}K}\left\{\frac{1}{sn\frac{2m}{n}K} - \frac{\theta'\left(\frac{m}{n}K\right)}{\theta\left(\frac{m}{n}K\right)}\right\}. \tag{17}$$

Satz B. Für $k = 0$ geht $T_n(x;\, m,\, k)$ in das trigonometrische Polynom $T_n(x)$ über.

Beweis. Für $k = 0$ ist:

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)} = \frac{\sin\left(u + \frac{m\pi}{2n}\right)}{\sin\left(u - \frac{m\pi}{2n}\right)}, \quad \theta(w) = \theta_1(w) = 1,$$

$$snu = \sin u, \quad cnu = \cos u, \quad dnu = 1.$$

Die Formeln (14_1), (14_2), (14_3) nehmen also für $k = 0$ folgende Gestalt an:

$$T_n(x;\, m,\, 0) = \frac{L}{2}\left\{\left[\frac{\sin\left(u + \frac{\pi m}{2n}\right)}{\sin\left(u - \frac{\pi m}{2n}\right)}\right]^n + \left[\frac{\sin\left(u - \frac{\pi m}{2n}\right)}{\sin\left(u + \frac{\pi m}{2n}\right)}\right]^n\right\},$$

$$x = \frac{\sin^2 u \cdot \cos^2\frac{\pi m}{2n} + \cos^2 u \cdot \sin^2\frac{\pi m}{2n}}{\sin^2 u - \sin^2\frac{\pi m}{2n}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left(u + \frac{\pi m}{2n}\right)}{\sin\left(u - \frac{\pi m}{2n}\right)} + \frac{\sin\left(u - \frac{\pi m}{2n}\right)}{\sin\left(u + \frac{\pi m}{2n}\right)}\right\},$$

$$L = \frac{1}{2^{n-1}};$$

setzt man also

$$\frac{\sin\left(u + \frac{\pi m}{2n}\right)}{\sin\left(u - \frac{\pi m}{2n}\right)} = w,$$

so entsteht für $T_n(x;\, m,\, 0)$ gerade diejenige Darstellung, welche für $T_n(x)$ durch (a), (b) gegeben wurde.

Satz C. Für Polynome $T_n(x;\, m,\, k)$ gelten die Relationen

$$T_n(-x;\, n-m,\, k) = (-1)^n T_n(x;\, m,\, k). \tag{18}$$

Beweis. Nach der Definition ist

$$(d)\qquad T_n(-x;\, n-m,\, k) = \frac{L}{2}\left\{\left[\frac{H\left(u' - \frac{n-m}{n}K\right)}{H\left(u' + \frac{n-m}{n}K\right)}\right]^n + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{H\left(u' + \frac{n-m}{n}K\right)}{H\left(u' - \frac{n-m}{n}K\right)}\right]^n\right\},$$

wo

$$(e)\qquad -x = \frac{sn^2 u' \cdot cn^2 \frac{n-m}{n}K + cn^2 u' \cdot sn^2 \frac{n-m}{n}K}{sn^2 u - sn^2 \frac{n-m}{n}K},$$

$$L = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{\theta(0)\,\theta_1(0)}{\theta\left(\frac{n-m}{n}K\right)\theta_1\left(\frac{n-m}{n}K\right)}\right]^{2n} = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{\theta(0)\,\theta_1(0)}{\theta\left(\frac{m}{n}K\right)\theta_1\left(\frac{m}{n}K\right)}\right]^{2n}.$$

Setzt man in diesen Formeln $u' = u + K$, so ergibt sich aus (d), dass

$$T_n(-x;\, n-m,\, k) = (-1)^n \frac{L}{2}\left\{\left[\frac{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)}\right]^n + \left[\frac{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}\right]^n\right\}$$

und aus (e) wegen (5) und (5 bis), dass

$$x = \frac{sn^2 u \cdot cn^2 \frac{m}{n}K + cn^2 u \cdot sn^2 \frac{m}{n}K}{sn^2 u - sn^2 \frac{m}{n}K}.$$

Satz D. In der aus den Intervallen

$$< -1,\ a >, < b,\ 1 >$$

bestehenden Punktmenge E ist der grösste Wert, welchen der absolute Betrag von $T_n(x;\, m,\, k)$ annehmen kann, gleich

$$(19)\qquad L = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\frac{\theta(0)\,\theta_1(0)}{\theta\left(\frac{m}{n}K\right)\theta_1\left(\frac{m}{n}K\right)}\right]^{2n} = L_n(m,\, k)$$

und zwar nimmt $T_n(x;\, m,\, k)$ den Wert L mit abwechselnden Vorzeichen in $\mu = n - m + 1$ aufeinander folgenden Punkten der Strecke $< -1,\, a >$ und in $\nu = m + 1$ solchen Punkten der Strecke $< b,\, 1 >$, wobei

$$T_n(a;\, m,\, k) = T_n(b;\, m,\, k) = (-1)^m L, \tag{20}$$

während in dem Intervalle $(a,\, b)$:

$$(-1)^m T_n(x;\, m,\, k) > L. \tag{20bis}$$

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt unmittelbar aus den Eigenschaften der allgemeinen Funktion $r(x)$, welche im § 5 betrachtet wurde und deren Speziellfall $T_n(x;\, m,\, k)$ bildet. Um den zweiten Teil zu beweisen, wollen wir die bekannte Beziehung

$$H(w + 2iK') = -H(w)\, e^{-\frac{\pi i}{K}(w + iK')} \tag{f}$$

nehmen und die Funktion

$$\frac{H\left(\frac{m}{n} K + u\right)}{H\left(\frac{m}{n} K - u\right)} \tag{g}$$

näher betrachten.

Es sei für $u = 0$ das Argument von (g) gleich Null. Umläuft u im positiven Sinne die Berandung des der Abbildung (14_2) entsprechenden Gebietes Δ (Fig. 2), so vermehrt sich das Argument von (g) um 2π; und da auf dem Rande des Bereiches Δ die Funktion (g) nur im Punkte $D(u = 0)$ reell und positiv ist, so hat das Argument von (g) im Punkte $A(u = iK')$, falls u in diesen Punkt längs DA kommt, einen positiven und kleineren als 2π Wert. Nun hat die Funktion (g) im Punkte A nach (f) den Wert

$$\frac{H\left(\frac{m}{n} K + iK'\right)}{H\left(\frac{m}{n} K - iK'\right)} = -e^{-\pi i \frac{m}{n}};$$

folglich ist in A (bei Erreichung dieser Stelle längs DA):

$$arg \frac{H\left(\frac{m}{n} K + iK'\right)}{H\left(\frac{m}{n} K - iK'\right)} = \frac{n - m}{n} \pi$$

und also

$$arg \left[\frac{H\left(\frac{m}{n} K + iK'\right)}{H\left(\frac{m}{n} K - iK'\right)}\right]^n = (n - m)\, \pi. \tag{h}$$

Die Gleichung (h) zeigt, dass auf $< -1, a >$ die Funktion $T_n(x; m, k)$ den Wert L mit abwechselnden Vorzeichen wirklich $n - m + 1$ mal annimmt (vgl. die Überlegung, welche zum Beweise der fundamentalen Eigenschaft der Funktion $r(x)$ diente). Ähnlich wird die entsprechende Eigenschaft der Funktion $T_n(x; m, k)$ auf $< b, 1 >$ bewiesen. Es bleibt uns nur die Beziehungen (20) und (20bis) zu beweisen. Die Beziehung (20) geht aus direkter Berechnung der Funktion $T_n(x; m, k)$ für $u = iK'$ und $u = -K + iK'$ hervor. Um (20bis) zu beweisen, bemerken wir, dass u auf AB (oder $A'B'$) liegt (Fig. 2), falls x dem Intervalle (a, b) angehört, und dass für solche u der Ausdruck

$$\left[\frac{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)}\right]^n$$

reell, von Null verschieden und numerisch nach (10) kleiner als Eins bleibt. Daraus folgt, dass auf AB

$$0 < (-1)^m \left[\frac{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)}\right]^n < 1$$

und folglich

$$(-1)^m \left\{\left[\frac{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)}\right]^n + \left[\frac{H\left(u - \frac{m}{n}K\right)}{H\left(u + \frac{m}{n}K\right)}\right]^n\right\} > 2,$$

was der Ungleichung (20bis) äquivalent ist.

Satz E. Ausserhalb der Punktmenge E

$$E: \qquad < -1, a >, < b, 1 >$$

hat die Ableitung der Funktion $T_n(x; m, k)$ nach x nur eine und dabei zwischen a und b gelegene Wurzel $x = c$, welche vermöge (17) und der Formel.[1]

$$(21) \qquad c = \frac{a + b}{2} - \tau_1$$

bestimmt werden kann.

[1] Es ist nicht ohne Interesse zu bemerken, dass c ebenso von a und b abhängt, wie die Grösse γ (Formel (12)) von α und β.

Beweis. Aus (20) folgt, dass $T_n'(x;\ m,\ k)$ in $(a,\ b)$ gewiss eine Nullstelle hat. Alle übrigen Nullstellen von $T_n'(x;\ m,\ k)$ müssen aber innerhalb E liegen, denn sonst wäre die Gesamtanzahl derjenigen Abweichungsstellen von $T_n(x;\ m,\ k)$, welche in $(-1,\ a)$ und $(b,\ 1)$ liegen, kleiner als $n-2$ (denn jede innere Abweichungsstelle von $T_n(x;\ m,\ k)$ ist eine Nullstelle für $T_n'(x;\ m,\ k)$), was dem Satze D widerspricht. Um (21) zu beweisen, wollen wir zeigen, dass die Funktion $T_n(x;\ m,\ k)$ der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (L^2 - y^2)\frac{n^2(x-c)^2}{(1-x^2)(a-x)(b-x)} \tag{22}$$

genügt. In der Tat, diese auch für sich wichtige Eigenschaft der Funktion

$$T_n(x;\ m,\ k)$$

führt zur Beziehung

$$(1-x^2)(a-x)(b-x)[nx^{n-1} - n(n-1)\tau_1 x^{n-2} + \ldots]^2 =$$
$$= n^2(x-c)^2\{L^2 - [x^n - n\tau_1 x^{n-1} + \ldots]^2\},$$

aus welcher (21) leicht gewonnen werden kann. Um aber (22) zu beweisen, genügt es zu bemerken, dass $T_n'(x;\ m,\ k)$ ausser $x=c$ nur an denjenigen Stellen verschwindet, welche der Gleichung

$$T_n^2(x;\ m,\ k) = L^2$$

genügen und von $x=-1,\ a,\ b,\ 1$ verschieden sind; in der Tat, hieraus ergibt sich, dass

$$\frac{(1-x^2)(a-x)(b-x)}{(x-c)^2}\,\frac{[T_n'(x;\ m,\ k)]^2}{L^2 - T_n^2(x;\ m,\ k)}$$

eine Konstante ist, welche offenbar nichts anderes als n^2 sein kann.

Satz F. Bezeichnen $\xi_m^{(n)} = \xi$ die grösste in dem Intervalle $<-1, a>$ und $\eta_m^{(n)} = \eta$ die kleinste in dem Intervalle $<b,\ 1>$ Nullstellen von

$$T_n'(x;\ m,\ k)$$

und genügen die Zahlen α, β den Ungleichungen

$$\xi \leqslant \alpha \leqslant a,\ b \leqslant \beta \leqslant \eta$$

so weicht unter allen Polynomen mit dem höchsten Gliede x^n das Polynom

$$T_n(x; m, k)$$

am wenigsten von Null ab in den Intervallen

$$<-1, \alpha>, \ <b, 1>$$

und in den Intervallen

$$<-1, a>, \ <\beta, 1>.$$

Dabei sind a, b vermöge (15_1) und (15_2) definiert.

Beweis. Der Satz folgt unmittelbar aus dem Satze D im Zusammenhange mit dem Fundamentalsatze II.

§ 9. **Eine weitere Eigenschaft der Polynome** $T_n(x; m, k)$. In diesem Paragraphen wollen wir zeigen, dass die Eigenschaft der Polynome $T_n(x; m, k)$, welche im Satze D formuliert ist, nur diesen Polynomen zukommt.

Satz G. Es sei $F(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit dem höchsten Gliede x^n, für welches:

1°. $\max |F(x)| = L$, falls x der aus zwei Intervallen

$$<-1, a>, \ <b, 1>$$

bestehenden Punktmenge E angehört;

2°. $F(x)$ nimmt mit abwechselnden Vorzeichen den Wert L an $n-m+1$ aufeinander folgenden Stellen von $<-1, a>$ und an $m+1$ solchen Stellen von $<b, 1>$;

dann gelten die Gleichungen (15_1), (15_2) und $F(x)$ ist mit $T_n(x; m, k)$ identisch, wobei der Modul k aus der Gleichung

$$k^2 = \frac{2(b-a)}{(1-a)(1+b)}$$

zu bestimmen ist.

Vorbemerkung. Der Satz besagt nicht, dass es für beliebige a und b ein den Bedingungen des Satzes genügendes Polynom $F(x)$ existiert. Eine solche Aussage wäre falsch. Aber falls ein solches Polynom existiert, so muss es dem beweisenden Satze zufolge mit $T_n(x; m, k)$ identisch sein.

1. Beweis. Bemerkt man, dass jede Nullstelle der Funktion

(a) $$F^2(x) - L^2,$$

welche innerhalb $(-1, a)$ oder $(b, 1)$ liegt, auch der Gleichung $F'(x) = 0$ genügen muss, und beachtet man, dass nach 2^0 die Gesamtanzahl verschiedener Nullstellen von (a) in den Intervallen $<-1, a>$, $<b, 1>$ gleich $n+2$ ist, so ergibt sich, dass $F'(x)$ innerhalb $(-1, a)$ und $(b, 1)$ mindestens $n-2$ Wurzeln haben muss, welche sämtlich als innere Abweichungsstellen von $F(x)$ erscheinen werden und zusammen mit denjenigen unter den vier Randpunkten -1, a, b, 1, welche auch Nullstellen von (a) sind, die sämtlichen Abweichungsstellen von $F(x)$ in $<-1, a>$ und $<b, 1>$ liefern werden. Es ist aber leicht zu sehen, dass $F'(x)$ in $(-1, a)$ und $(b, 1)$, d. h. innerhalb E, genau $n-2$ Nullstellen haben muss. In der Tat, hätte $F'(x)$ innerhalb E $n-1$ Wurzeln, so wäre noch mindestens eine der Zahlen a, b eine einfache Nullstelle von (a), denn sonst hätte $F(x)$ weniger, als $n+2$ Abweichungsstellen. Aber dann müsste in einer einseitigen, E nicht angehörenden, Umgebung dieser einfachen Nullstelle von (a) die Ungleichung $|F(x)| \geqslant L$ bestehen, und da an der anderen der zwei Stellen a, b die Funktion $F(x)$ numerisch nicht grösser als L ist, so hätte $F'(x)$ noch eine Wurzel zwischen a und b, was unmöglich ist. $F'(x)$ hat somit genau $n-2$ Wurzeln innerhalb E und also alle vier Zahlen $-1, a, b, 1$ sind einfache Nullstellen von (a). Dabei müssen offenbar die Grössen $F(a)$ und $F(b)$ gleiches Vorzeichen haben, sodass

$$F(a) = F(b) = \pm L.$$

Hieraus folgt, dass die letzte Nullstelle von $F'(x)$ zwischen a und b liegt. Bezeichnet man diese Nullstelle durch c und die übrigen durch

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-2},$$

so bestehen die Gleichungen

$$F'(x) = n(x-c)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-2}),$$

$$F^2(x) - L^2 = (x^2-1)(x-a)(x-b)(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_{n-2})^2,$$

sodass

$$F^2(x) - L^2 = \frac{(x^2-1)(x-a)(x-b)}{n^2(x-c)^2} F'^2(x),$$

wo nur eine a priori unbekannte Grösse c enthalten ist.

Diese Relation kann mann in der Form

$$\text{(b)} \qquad \log \frac{F(x) + \sqrt{F^2(x) - L^2}}{(-1)^n L} = \int_{-1}^{x} \frac{n(x-c)\,dx}{\sqrt{(x^2-1)(x-a)(x-b)}}$$

darstellen, da für $x = -1$ das Polynom $F(x)$ nach 2^0 den Wert $(-1)^n L$ annimmt; dabei werden die beiden Quadratwurzeln

$$\sqrt{F^2(x) - L^2},\quad \sqrt{(x^2-1)(x-a)(x-b)}$$

derart definiert, dass sie für $x > 1$ positive Werte haben. Werden jetzt die Grössen k und ρ vermöge der Gleichungen

$$k^2 = \frac{2(b-a)}{(1-a)(1+b)},\quad 1 - 2sn^2(\rho; k) = a \qquad (-K < \rho < 0)$$

bestimmt und wird anstatt x die neue Veränderliche u nach

$$x = \frac{sn^2 u \cdot cn^2 \rho + cn^2 u \cdot sn^2 \rho}{sn^2 u - sn^2 \rho}$$

eingeführt, so nimmt (b) die folgende Gestalt an:

(c)
$$\log \frac{F(x) + \sqrt{F^2(x) - L^2}}{(-1)^n L} = u \frac{n(c-a)\,dn\rho}{sn\rho \cdot cn\rho} +$$

$$+ 2n\, sn\rho \cdot cn\rho \cdot dn\rho \int_0^u \frac{du}{sn^2\rho - sn^2 u} = n \log \frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)} +$$

$$+ nu \left\{ \frac{(c-a)\,dn\rho}{sn\rho \cdot cn\rho} - 2\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)} \right\}.$$

Nun wollen wir x von a bis b monoton zunehmen lassen. Dann wird $|F(x)|$ zunächst zunehmen und dann zurück bis L abnehmen. Daraus ergibt sich nach (b), dass

$$\int_a^b \frac{n(x-c)\,dx}{\sqrt{(x^2-1)(x-a)(x-b)}} = 0$$

oder (da $u = iK'$ für $x = a$ und $u = -K + iK'$ für $x = b$):

$$n \log \frac{H(\rho+iK')}{H(\rho-iK')} + inK' \left[\frac{(c-a)\,dn\rho}{sn\rho \cdot cn\rho} - 2\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)} \right] = n \log \frac{H(\rho+iK'-K)}{H(\rho-iK'+K)} +$$

$$+ n(iK' - K) \left[\frac{(c-a)\,dn\rho}{sn\rho \cdot cn\rho} - 2\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)} \right],$$

woraus die Gleichung

$$\frac{(c-a)\,dn\rho}{sn\rho\cdot cn\rho}-2\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)}=0$$

folgt.

Diese Gleichung zeigt, dass

$$c=a+\frac{2sn\rho\cdot cn\rho}{dn\rho}\frac{\theta'(\rho)}{\theta(\rho)}. \tag{d}$$

Zugleich nimmt (c) die Gestalt

$$\log\frac{F(x)+\sqrt{F^2(x)-L^2}}{(-1)^n L}=n\log\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}$$

an, woraus für $F(x)$ der Ausdruck

$$F(x)=\frac{L}{2}\left\{\left[\frac{H(u+\rho)}{H(u-\rho)}\right]^n+\left[\frac{H(u-\rho)}{H(u+\rho)}\right]^n\right\} \tag{e}$$

folgt.

Nun ist aber $F(x)$ ein Polynom von x und muss also die Periode $2iK$ in bezug auf u haben. Daraus ergibt sich, dass

$$\rho=-\frac{pK}{n},$$

wo p einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n-1$ gleich ist (denn $-K<\rho<0$). Folglich ist $F(x)$ mit einer unter den ganzen Funktionen $T_n(x; p, k)$ identisch, und nach dem Satze D wegen 2^0 muss dies die Funktion $T_n(x; m, k)$ sein. Damit ist der Satz bewiesen.

2. Beweis. Überlegungen, welche denjenigen des ersten Beweises ähnlich sind, zeigen, dass alle $2n$ Nullstellen der Funktion (a) in den Intervallen $<-1, a>$, $<b, 1>$ gelegen sind; und da die einzige Unendlichkeitsstelle der Funktion (a) in $x=\infty$ liegt und von gerader Ordnung $2n$ ist, so ist die Funktion

$$\eta=\frac{F(x)+\sqrt{F^2(x)-L^2}}{L} \tag{f}$$

in der längs der Strecken $<-1, a>$, $<b, 1>$ aufgeschlitzten x-Ebene (ein Gebiet, welches, wie früher, mit G bezeichnet werden soll) eindeutig. Wir können und wollen daher die Quadratwurzel in (f) derart definieren, dass η für $x=\infty$ unendlich wird; dann hat η in G gar keine Nullstelle. In E besteht die Gleichung $|\eta|=1$, denn in E (und dabei nur in E) ist

$$F^2(x)\leqslant L^2.$$

Um die Untersuchung der Funktion η zu vereinfachen, wollen wir das Gebiet G auf ein gewisses Ringgebiet Γ der v-Ebene konform abbilden.

Dazu setzen wir nach § 4

$$k^2 = \frac{2(b-a)}{(1-a)(1+b)},$$

bestimmen die Grösse $\rho\,(-K < \rho < 0)$ aus

$$1 - 2sn^2\rho = a$$

und führen anstatt der Veränderlichen x die neuen Veränderlichen u und v nach den Gleichungen

$$x = \frac{sn^2u \cdot cn^2\rho + cn^2u \cdot sn^2\rho}{sn^2u - sn^2\rho},$$

$$u = \frac{K'}{\pi}\log v$$

ein. Der Rand des Gebietes Γ besteht, wie wir wissen, aus den Kreislinien

$$|v| = 1, \quad |v| = e^{-\pi\frac{K}{K'}} = r.$$

Nun besitzt η, als Funktion von v betrachtet, offenbar folgende Eigenschaften:

1°. η ist in Γ eindeutig.

2°. Auf dem Rande von Γ ist $|\eta| = 1$.

3°. In Γ hat η gar keine Nullstelle und nur einen Pol n-ter Ordnung bei

$$v = e^{\pi\frac{\rho}{K'}},$$

d. h. bei $u = \rho$.

Aus der Eigenschaft 2° folgt nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip, dass $\eta = \eta(v)$ der Funktionalgleichung

$$\overline{\eta(v)} = \frac{1}{\eta\left(\frac{1}{v}\right)} = \frac{1}{\eta\left(\frac{r^2}{v}\right)}$$

genügt; ferner aus 1°, dass

$$\eta(v) = \eta(ve^{2\pi i}).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass η als Funktion von u aufgefasst die beiden Perioden $2K$ und $2iK'$ hat, ferner bei

$$u = \rho + 2\mu K + 2\mu' iK'$$

Unendlichkeitstellen n-ter Ordnung und bei

$$u = -\rho + 2\nu K + 2\nu' iK'$$

Nullstellen n-ter Ordnung besitzt, wo μ, μ', ν, ν' ganz sind.

Nach dem Lionvilleschen Satze folgt daraus, dass

$$\rho = -\frac{p}{n} K,$$

wo p ganz ist und wegen $-K < \rho < 0$ einer der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ gleich sein muss. Ferner lehrt die bekannte Darstellung der elliptischen Funktionen, dass

$$\eta = \mathcal{E}\left[\frac{H\left(u - \frac{p}{n}K\right)}{H\left(u + \frac{p}{n}K\right)}\right]^n,$$

wo $\mathcal{E}$ eine Konstante vom absoluten Betrage Eins bedeutet, sodass nach (f) die Gleichung

$$F(x) = \frac{L}{2}\left\{\mathcal{E}\left[\frac{H\left(u - \frac{p}{n}K\right)}{H\left(u + \frac{p}{n}K\right)}\right]^n + \frac{1}{\mathcal{E}}\left[\frac{H\left(u + \frac{p}{n}K\right)}{H\left(u - \frac{p}{n}K\right)}\right]^n\right\}$$

bestehen wird.

Da aber $F(x)$ ohne Änderung bleiben muss beim Ersatze der Grösse u durch $-u$, so kann $\mathcal{E}$ nur ± 1 gleich sein.

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{E} = 1$, so dass $F(x)$ die Form $T_n(x; p, k)$ hat.

Beachtet man jetzt den Satz D und die Voraussetzung 2^0 des beweisenden Satzes, so ergibt sich, dass p nichts anderes als m sein kann. Damit ist der Satz aufs Neue bewiesen.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

WELLENFORTPFLANZUNG UND BEUGUNG IN INHOMOGENEN ISOTROPEN MEDIEN

Von V. IGNATOVSKIJ (W. v. Ignatowsky)

Présenté par A. Krylov, *membre de l'Académie des Sciences*

§ 1. Statischer Fall. Grundlösung und Greenscher Integralsatz. § 2. Zeitlich periodischer Fall. Grundlösung und Kirchhoffsches Integral. § 3 Übergang zur Beugung. § 4. Hilfsbetrachtung. § 5. Beugung an einem Objektiv. § 6. Einige Bemerkungen.

§ 1. Statischer Fall. Grundlösung und Greenscher Integralsatz

In meiner vorhergehenden Arbeit* habe ich untersucht, wie sich Störungen, welche durch die Anfangsbedingungen gegeben sind, in einem inhomogenen isotropen Medium fortpflanzen.

Die vorliegende Arbeit bildet insofern eine Fortsetzung, als sie sich mit der Fortpflanzung von Wellen in ebensolchen Medien befasst.

Bevor wir aber hierzu übergehen, müssen wir noch den statischen Fall näher untersuchen.

Zu dem Zweck gehen wir von der Gleichung (2) § 15 I

$$\frac{div n \nabla u}{n^3} = \Delta u = 0 \tag{1}$$

aus, welche also die Stelle der Laplaceschen Gleichung bei inhomogenen Medien vertritt.

Ferner setzen wir

$$\Delta u + 4\pi\rho = 0 \tag{2}$$

und betrachten dies als die Poissonsche Gleichung für unsere Medien.

* W. v. Ignatowsky. Fortpflanzung von Störungen in inhomogenen isotropen Medien. BAS-MN, 1932, Nr. 7, p. 857) hier zitiert unter I).

Als Grundlösung q von (1) nehmen wir diejenige durch (3) § 15 I definierte an. Bei (2) setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass u in einem gewissen Bereich B, um den Punkt P_0 herum, zusammen mit seinen ersten und zweiten Derivierten nach den Koordinaten überall endlich und stetig sein wird.

Wir erhalten dann aus (1) und (2) eine im Bereich B, mit Ausnahme des Punktes P_0, gültige Beziehung

$$q\Delta u + 4\pi\rho q - u\Delta q = 0 \tag{3}$$

oder

$$4\pi\rho q + \frac{div\, nq\nabla u}{n^3} - \frac{div\, nu\nabla q}{n^3} = 0 \tag{4}$$

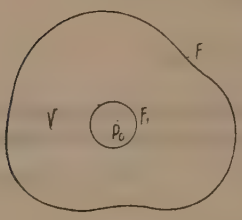


Fig. 1

Die Oberfläche F liege innerhalb des Bereiches B und umschliesst den Punkt P_0 (Fig. 1).

F_1 ist die Oberfläche einer geod. Kug. um P_0 herum. Endlich bedeutet V das Volumen zwischen F und F_1. Aus (4) folgt dann

$$0 = 4\pi \int_V \rho q n^3\, dv + \int_F \left\{ nq \frac{du}{dN} - nu \frac{dq}{dN} \right\} df - \int_{F_1} \left\{ nq \frac{du}{dN} - nu \frac{dq}{dN} \right\} df. \tag{5}$$

Das Minuszeichen beim zweiten Integral erklärt sich dadurch, dass wir die Normale zu F_1 in V hinein gerechnet haben. (Auf F ist N_1 wie immer, die äussere Normale).

Lassen wir nun die geod. Kug. F_1 in den Punkt P_0 zusammenschrumpfen, so ergibt uns (5), analog den Ausführungen des § 15 I

$$u(P_0) = \int_V \rho q n^3\, dv + \frac{1}{4\pi} \int_F nq \frac{du}{dN}\, df - \frac{1}{4\pi} \int_F nu \frac{dq}{dN}\, df \tag{6}$$

wo $u(P_0)$ den Wert von u im Punkte P_0 bedeutet.

Für $n = 1$ ist $q = \frac{1}{r}$, und (6) geht dann in den bekannten Greenschen Integralsatz über, weshalb sich die Deutung der einzelnen Glieder in (6) von selbst ergibt.

Wir können demnach (6) als den Greenschen Integralsatz für inhomogene isotrope Medien betrachten.

Speziell für $\rho = 0$ folgt aus (6).

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_F nq\frac{du}{dN}\,df - \frac{1}{4\pi}\int_F nu\frac{dq}{dN}\,df. \tag{7}$$

Wir kehren nun wieder zu den Brechungsexponenten unserer vorhergehenden Arbeit zurück, d. h. zu

$$n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2}; \quad w = \frac{\sin mE}{m}; \quad m = \frac{2}{bn_1} \tag{8}$$

und

$$n = \frac{b^2 n_1}{b^2 - R^2}; \quad w = \frac{\sinh mE}{m}; \quad m = \frac{2}{bn_1}. \tag{9}$$

Als Grundlösungen q, resp. als Potentiale, haben wir für diese Brechungsexponenten die Werte (11) und (12) § 15 I

$$q = \frac{m}{\operatorname{tg} mE}; \quad q = \frac{m}{\operatorname{tgh} mE} \tag{10}$$

erhalten, wobei wir die additive Konstante einfach wegliessen. Aus Gründen die später ersichtlich sein werden (siehe folgenden § 2) wollen wir diese Konstante berücksichtigen und können dann statt (10) die folgenden Grundlösungen hinschreiben

$$q = \frac{e^{-imE}}{w}; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2} \tag{11}$$

und

$$q = \frac{e^{-mE}}{w}; \quad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 - R^2} \tag{12}$$

wo selbstverständlich die w gleich den entsprechenden Werten in (9) sein werden.

Dies in (7) eingesetzt ergibt

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left\{\frac{ne^{-imE}}{w}\frac{du}{dN} - nu\frac{d\overset{e^{-imE}}{w}}{dN}\right\} df \tag{13}$$

und

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left\{\frac{ne^{-mE}}{w}\frac{du}{dN} - nu\frac{d\overset{e^{-mE}}{w}}{dN}\right\} df. \tag{14}$$

Die Ausdrücke (13) und (14) sind demnach spezielle Fälle des Greenschen Integralsatzes ($\rho = 0$) für die gewählten Brechungsexponenten.

§ 2. Zeitlich periodischer Fall. Grundlösung und Kirchhoffsches Integral

Wir wollen nun jetzt zu zeitlich periodischen Zuständen übergehen, zu welchem Zweck wir die Gleichung (1) § 6 I

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{div\, n\nabla u}{n^2} = \Delta u \tag{1}$$

betrachten werden.

Wir setzen nun

$$u = qe^{i\omega t};\quad \omega = \frac{2\pi}{T};\quad T = \text{Periode} \tag{2}$$

weshalb sich für q die Gleichung

$$\Delta q + k^2 q = 0;\, k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{3}$$

ergibt (λ = Wellenlänge im Vakuum) und q nur von den Koordinaten abhängen wird.

Wir haben in den §§ 4 und 5 I die Funktion w eingeführt und weiter unter der Annahme, dass w nur von E abhängt, gerechnet.

Dieselbe Annahme wollen wir nun auch bezüglich q in (3) machen.

Dann ergibt uns (3), auf Grund von (23) § 4 I

$$\frac{dw^2\frac{dq}{dE}}{w^2 dE} + k^2 q = 0 \tag{4}$$

woraus dann, falls wir die Funktion

$$\varphi = wq \tag{5}$$

einführen, statt (4) folgt

$$\frac{d^2\varphi}{dE^2} + k^2\varphi - \varphi\frac{d^2 w}{w dE^2} = 0. \tag{6}$$

Für den Brechungsexponenten (8) § 1 fliesst dann aus (6)

$$\frac{d^2\varphi}{dE^2} + \left(k^2 + m^2\right)\varphi = 0. \tag{7}$$

Hieraus (5) und (2) erhalten wir deshalb als partikuläres Integral von (1)

$$u = \frac{e^{i(\omega t - E\sqrt{k^2+m^2})}}{w} \tag{8}$$

was einer Welle entspricht, die vom Punkte P_0 aus (Fig. 9 § 9 I) vom welchem wir die geod. Länge E rechnen, divergiert.

Analog stellt

$$u = \frac{e^{i(\omega t + E\sqrt{k^2+m^2})}}{w} \tag{9}$$

eine zu dem Punkt P_0 konvergierende Welle dar.

Gehen wir nun zu dem Brechungsexponent (9) § 1 über so folgt statt (7)

$$\frac{d^2\varphi}{dE^2} + (k^2 - m^2)\varphi = 0. \tag{10}$$

Hieraus ergeben sich dann als partikuläre Lösungen von (1)

$$u = \frac{e^{i(\omega t - E\sqrt{k^2-m^2})}}{w}; \quad k^2 \geqq m^2 \tag{11}$$

und

$$u = \frac{e^{i\omega t - E\sqrt{m^2-k^2}}}{w}; \quad k^2 \leqq m^2. \tag{12}$$

Die so erhaltenen Lösungen betrachten wir als Grundlösungen, da sie dieselben Eigenschaften in Bezug auf ihr Verhalten im Punkte P_0 aufweisen wie die Grundlösungen des vorigen §.

Es sei nun q überhaupt eine Grundlösung der genannten Eigenschaft und q_1 eine solche Lösung von (3), welche zusammen mit ihren ersten und zweiten Deriviierten nach den Koordinaten überall im Bereich B (siehe § 1) endlich und stetig ist.

Wir haben dann eine im Bereich B, mit Ausnahme des Punktes P_0, gültige Beziehung

$$q\Delta q_1 - q_1\Delta q = 0 \tag{13}$$

oder

$$divnq\nabla q_1 - divnq_1\nabla q = 0 \tag{14}$$

und hieraus folgt nun, analog dem vorhergehenden § und unter Beachtung der Fig. 1

$$q_1(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left\{ nq\frac{dq_1}{dN} - nq_1\frac{dq}{dN}\right\} df \tag{15}$$

oder wegen (2)

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left\{ nq\frac{dq_1 e^{i\omega t}}{dN} - nq_1 e^{i\omega t}\frac{dq}{dN}\right\} df. \tag{16}$$

Diese Beziehung gilt also nach dem Obigen ganz allgemein, solange nur q eine Grundlösung ist, also unabhängig von der oben gemachten Annahme bezüglich w.

Beachten wir nun, dass für $n = 1$, die Grundlösung von (1)

$$q = \frac{e^{i(\omega t - rk)}}{r} \tag{17}$$

lautet, so ersehen wir, dass (16) hierbei in das Kirchhoffsche Integral für zeitlich periodische Zustände übergeht.

Deshalb können wir also (16) allgemein als das Kirchhoffsche Integral bei zeitlich periodischen Zuständen für inhomogene isotrope Medien betrachten.*

Die Auswertung dieses Integrals erfordert aber die Kenntniss der Grundlösung q, was eben bei der Annahme der Abhängigkeit nur von E, wie wir gesehen haben, in gewissen Fällen, möglich ist.

Z. B. erhalten wir für den Brechungsexponenten (8) § 1

$$q_1(Po) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left\{ \frac{ne^{-iE\sqrt{k^2+m^2}}}{w}\frac{dq_1}{dN} - nq_1\frac{d\frac{e^{-iE\sqrt{k^2+m^2}}}{w}}{dN}\right\} df \tag{18}$$

oder wieder wegen (2)

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi}\int_F \left\{ \frac{ne^{-iE\sqrt{k^2+m^2}}}{w}\frac{dq_1 e^{i\omega t}}{dN} - nq_1 e^{i\omega t}\frac{d\frac{e^{-iE\sqrt{k^2+m^2}}}{w}}{dN}\right\} df. \tag{19}$$

* Auf die allgemeine Kirchhoffsche Formel bei nicht periodischen Zustand denken wir später zurück zu kommen.

Hierbei, wie auch im allgemeinen Ausdruck (16), ist $q_1 e^{i\omega t}$ gleich dem Wert von u auf F.

Es stellt demnach (19) das Kirchhoffsche Integral für den Brechungsexponenten (8) § 1 dar.

Führen wir nun jetzt den Übergang zum statischen Fall aus, d. h. machen $k = 0$, so geht (19) in (13) § 1 über und (8) und (12) in (11) und (12) § 1, wodurch die Einführung dieser letzten Ausdrücke erklärt ist.

§ 3. Übergang zur Beugung

Wir wollen nun auf Grund des Integrals (19) § 2, welcher dem Brechungsexponent

$$(1) \qquad n = \frac{b^2 n_1}{b^2 + R^2}; \quad w = \frac{\sin mE}{m}; \quad m = \frac{2}{bn_1}$$

entspricht, die Beugung an einer Öffnung berechnen indem wir hierbei genau dieselben Vereinfachungen einführen, wie dies bei homogenen Medien geschieht.*

Zu dem Zweck erinnern wir uns der Fig. 9 § 9 I und ziehen vom Punkt P_0 eine Extremale bis zu einem Punkt P_1 (Fig. 2). Zwischen diesen beiden Punkten bringen wir einen undurchsichtigen Schirm CD mit der Öffnung cd.

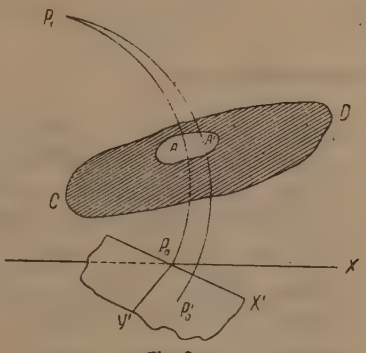


Fig. 2

Der Punkt A auf der Extremale liege innerhalb der Öffnung, deren Dimensionen (Entfernung des Randes von A) klein seien im Vergleich zu der geod. Länge AP_1, resp. AP_0. Durch den Rand dieser Öffnung denken wir uns eine Fläche F_1 gelegt, welche durch A durchgeht und dort senkrecht zu der Extremalen P_1P_0 ist. Die geod. Länge von P_1 aus bis zu einem Punkt A' von F_1 sei E_1.

In P_1 nehmen wir nun eine Lichtquelle an, die eine Welle ausstrahlt, welche durch

* Siehe z. B. Drude, P.: «Lehrbuch der Optik», Hirzel, Leipzig. 2-te Aufl. 1906, p. 170 u. flg. oder auch Försterling, K.: «Lehrbuch der Optik», Hirzel, Leipzig, 1928, p. 228—230 und 241 u. flg.

$$u_1 = q_1 e^{i\omega t} = \frac{B e^{i(\omega t - ikE_1\sqrt{k^2+m^2})}}{w} \tag{2}$$

gegeben sein soll. (B = reelle Konstante).

Ferner legen wir durch P_0 eine Ebene $X'Y'$, senkrecht zu der Extremale P_0A im Punkte P_0. Auf dieser Ebene nehmen wir einen Punkt P_0', dessen Entfernung von P_0, klein sein soll im Vergleich zu der geod. Länge $P_0'A'$, welche wir durch E' bezeichnen.

Auf Grund von (19) § 2 wollen wir nun den Zustand in P_0' berechnen unter den gewöhnlichen Annahmen:

1) Statt F setzen wir F_1,

2) Der Zustand auf F_1, erzeugt durch die Quelle in P_1 ist derselbe, als ob der Schirm nicht vorhanden wäre,

3) k soll sehr gross sein (λ also sehr klein), so dass wir in (19) § 2 nur die mit k multiplizierten Grössen zu berücksichtigen haben. (Diese entstehen durch Differentiation).

Wir führen nun den Wert von q_1 aus (2) in (19) § 2 ein und schreiben wegen (3) § 13 I,

$$\sqrt{k^2+m^2} = k\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{L^2}} = kp = \frac{2\pi p}{\lambda} \tag{3}$$

dann erhalten wir,

$$u(P_0') = \frac{Bipe^{i\omega t}}{2\lambda w' w_1} \int_{F_1} n e^{-ikp(E'+E_1)} \left\{\frac{dE'}{dN} - \frac{dE_1}{dN}\right\} df. \tag{4}$$

Hierbei müssen wir beachten, dass in w_1 die geod. Länge E_1 und in w' die geod. Länge E' eingehen. Wegen der angenommenen Dimensionsverhältnisse und da w' und w_1 auf die Phase nicht wirken, können wir diese Grössen als konstant langs F_1 annehmen, weshalb wir sie auch aus dem Integral herausgehoben haben.

Da F_1 bei A senkrecht zu der Extremalen P_0P_1 ist, so können wir wieder, wegen den Dimensionsverhältnissen schreiben,

$$\frac{dE'}{dN} = n; \quad \frac{dE_1}{dN} = -n \tag{5}$$

wo N, wie immer die äussere Normale zu F in (19) § 2 bedeutet.

Wir erhalten dann entgültig statt (4)

$$u(P_0') = \frac{Bipe^{i\omega t}}{\lambda w' w_1} \int_{F_1} n^2 e^{-ikp(E'+E_1)}\, df. \tag{6}$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun benutzen um die Beugung an einem Objektiv zu berechnen, müssen aber vorher eine Hilfbetrachtung einschalten.

§ 4. Hilfsbetrachtung

Es sei Fig. 3 P_0A eine Extremale mit der geod. Länge E und CA der tatsächliche Radius der geod. Kugel (Vergleiche Fig. 9 § 9 I).

Es ist*

$$(1) \qquad CA = \frac{2a\lambda}{1-\lambda^2} = f.$$

Die geod. Kug. wird durch die Rotation der Figur um die X-Achs gebildet. Ferner sei $BADMB$ ein Teil der Fläche dieser Kugel und A' ein Punkt auf derselben, welchen wir ebenfalls durch eine Extremale mit P_0 verbinden. Die geod. Länge derselben ist gleich dem obigen E und die Gerade AC ist gleich $A'C$.

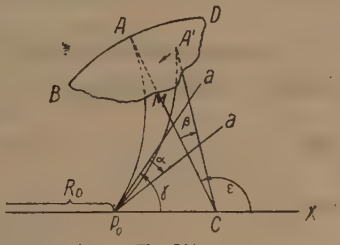


Fig. 3**

P_0a und P_0a' sind Tangenten an die Extremalen P_0A und P_0A' im Punkte P_0.

Wir denken uns den Punkt A' beweglich um den Punkt A herum.

Hierbei beschreibt P_0a', resp. CA' einen Kegel um P_0a, resp. um CA. Die entsprechenden Drehungswinkel bezeichnen wir durch η, resp. durch μ, positiv gerechnet im entgegengesetztem Sinne der Drehung des Uhrzeigers, falls wir längs P_0a, resp. längs CA blicken. (Der Punkt A' bewegt sich hierbei in Richtung des Pfeiles). Die Anfangslage dieser Winkel ist von der Ebene der Fig. zu rechnen.

Bezeichnen wir ferner den Winkel zwischen P_0a und P_0a' durch α resp. zwischen CA und CA' durch β, so wird unsere Aufgabe sein die Beziehung zwischen α und η einerseits und β und μ anderseits aufzustellen.

Den Winkel zwischen dem Radius CA und der positiven Richtung der X-Achse bezeichnen wir durch ε (siehe Fig. 3) und es wird sein

$$(2) \qquad \cos\varepsilon = \frac{(1+\lambda^2)\cos\gamma - 2\lambda}{1 - 2\lambda\cos\gamma + \lambda^2}$$

* Man achte auf die Bedeutung von λ laut I.

** Von den zwei Geraden P_0a liess statt der unteren P_0a'.

und

$$\sin\varepsilon = \frac{(1-\lambda^2)\sin\gamma}{1-2\lambda\cos\gamma+\lambda^2} \tag{3}$$

da laut Fig. 9 I, $\omega = \gamma$ ist.

Wir bemerken sofort, dass die Extremale P_0A' in einer Ebene liegt, die durch A' und die X-Achse durchgeht. Den Winkel zwischen dieser Achse und der Extremalen bezeichnen wir durch γ_1, d. h. $\angle\, a'P_0C$. Ferner sei, wie gewöhnlich φ der Winkel zwischen der Ebene $A'P_0C$ und derjenigen der Fig.

Dann wird sein,

$$\sin\gamma_1\sin\varphi = \sin\alpha\sin\eta \tag{4}$$

und

$$\cos\gamma_1 = \cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\cos\eta\sin\gamma. \tag{5}$$

Bezeichnen wir analog (3), den Winkel zwischen $A'C$ und der X-Achse durch ε_1, so erhalten wir

$$\sin\varepsilon_1\sin\varphi = \sin\beta\sin\mu \tag{6}$$

und

$$\cos\varepsilon_1 = \cos\beta\cos\varepsilon+\sin\beta\cos\mu\sin\varepsilon. \tag{7}$$

Aus (4) und (6) ergibt sich

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\varepsilon_1} = \frac{\sin\alpha\sin\eta}{\sin\beta\sin\mu}. \tag{8}$$

Ferner haben wir

$$\sin\gamma_1\cos\varphi = \cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\eta\cos\gamma \tag{9}$$

und analog

$$\sin\varepsilon_1\cos\varphi = \cos\beta\sin\varepsilon-\sin\beta\cos\mu\cos\varepsilon. \tag{10}$$

Aus (3) folgt,

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\varepsilon_1} = \frac{1-2\lambda\cos\gamma_1+\lambda^2}{1-\lambda^2} \tag{11}$$

Deshalb wegen (8) und (5)

$$\frac{\sin\alpha\sin\eta}{\sin\beta\sin\mu} = \frac{1+\lambda^2-2\lambda\{\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\cos\eta\sin\gamma\}}{1-\lambda^2} \tag{12}$$

und hieraus und (8), (9) und (10)

$$\frac{\sin\alpha\sin\eta}{\sin\beta\sin\mu} = \frac{\cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\eta\cos\gamma}{\cos\beta\sin\varepsilon-\sin\beta\cos\mu\sin\varepsilon}. \tag{13}$$

Wir hätten demnach die Beziehungen zwischen den entsprechenden Winkeln aufgestellt. Um dieselben aufzulösen machen wir nun die vereinfachende Annahme, auf die es uns ja auch später nur ankommt, dass α und β so klein sind, dass wir

$$\sin\alpha = \alpha;\ \cos\alpha = 1;\ \sin\beta = \beta;\ \cos\beta = 1 \tag{14}$$

setzen können.

Wir erhalten dann aus (12), unter Beachtung von (3),

$$\frac{\alpha\sin\eta}{\beta\sin\mu} = \frac{\sin\gamma(1-\lambda^2)-2\lambda\alpha\cos\eta\sin\gamma\sin\varepsilon}{(1-\lambda^2)\sin\varepsilon} \tag{15}$$

und aus (13)

$$\frac{\alpha\sin\eta}{\beta\sin\mu} = \frac{\sin\gamma-\alpha\cos\eta\cos\gamma}{\sin\varepsilon-\beta\cos\mu\cos\varepsilon}. \tag{16}$$

Aus (15) ergibt sich nun

$$\beta\sin\mu = \frac{\alpha-(1-\lambda^2)\sin\eta\sin\varepsilon}{(1-\lambda^2)\sin\gamma-2\lambda\alpha\cos\eta\sin\gamma\sin\varepsilon}. \tag{17}$$

Ein Vergleich von (15) und (16) liefert nun

$$\beta\cos\mu = \frac{\alpha\cos\eta\sin\varepsilon\{(1-\lambda^2)\cos\gamma-2\lambda\sin\varepsilon\sin\gamma\}}{\cos 2\sin\gamma\{1-\lambda^2-2\lambda\alpha\cos\eta\sin\varepsilon\}}. \tag{18}$$

Auf Grund von (3) und (2) haben wir aber,

$$(1-\lambda^2)\cos\gamma-2\lambda\sin\varepsilon\sin\gamma = \tag{19}$$

$$= (1-\lambda^2)\left\{\cos\gamma-\frac{2\lambda\sin^2\gamma}{1-2\lambda\cos\gamma+\lambda^2}\right\} = (1-\lambda^2)\cdot\frac{(1+\lambda^2)\cos\gamma-2\lambda}{1-2\lambda\cos\gamma+\lambda^2} =$$

$$= (1-\lambda^2)\cos\varepsilon.$$

Deshalb statt (18)

$$\beta\cos\mu = \frac{\alpha\cos\eta\sin\varepsilon(1-\lambda^2)}{\sin\gamma\{1-\lambda^2-2\lambda\alpha\cos\eta\sin\varepsilon\}}. \tag{20}$$

Hieraus und (17) erhalten wir demnach

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}\eta. \tag{21}$$

D. h.

$$\mu = \eta. \tag{22}$$

Folglich wegen (20) und unter Beachtung von (1),

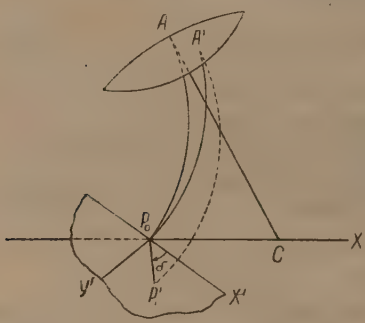


Fig. 4

$$\beta = \frac{\alpha\sin\varepsilon}{\sin\gamma\left\{1-\frac{\alpha f}{a}\cos\eta\sin\varepsilon\right\}} \tag{23}$$

oder da $\frac{f}{a}$ im allgemeinen Klein sein wird und α als klein angenommen, statt (23) wegen (3)

$$\beta = \frac{\alpha\sin\varepsilon}{\sin\gamma} = \frac{\alpha(1-\lambda^2)}{1-2\lambda\cos\gamma+\lambda^2}. \tag{24}$$

Hieraus ersehen wir nun, dass falls CA' um CA einen Kreiskegel beschreibt, dass dann P_0a' einen ebensolchen Kegel um P_0a beschreiben wird, wobei immer die Beziehung (22) gültig bleibt.

Auf dieses Resultat, was wir im nächsten § verwerten werden, kam es uns eben an.

§ 5. Beugung an einem Objektiv

Nach den vorbereitenden Bemerkungen des vorigen § können wir nun leicht die Beugung an einem Objektiv berechnen.

Wir denken uns die Öffnung in der Fig. 2 kreisrund und es falle die Fläche dieser Öffnung mit der geod. Kugel der Fig. 3 zusammen. Der Mittelpunkt dieser Kreisfläche sei A der Fig. 3.

Unmittelbar vor der Öffnung denken wir uns eine Linse, deren Achse mit AC zusammenfällt und welche uns eine nach dem Punkt P_0 konvergierende Welle liefern soll (Fig. 4).

Die geod. Länge der Extremale P_0A sei wie früher gleich E.

Genau wie in der Fig. 2 legen wir eine Ebene $Y'X'$, senkrecht zu der Extremale $P_0\,A$ im Punkte P_0.

Der Zustand im Punkte P_0' auf dieser Ebene berechnet sich auf Grund von (6) § 3, falls wir dort $E_1 = -E$ setzen (siehe (9) § 2) und es wird sein

$$u(P_0') = \frac{ipBe^{i\omega t}}{\lambda w' w_1} \int_{F_1} n^2 e^{ikp(E-E')}\, df. \tag{1}$$

Da aber in diesem Fall F_1 mit der Wellenfläche der konvergierenden Welle, resp. mit der Fläche der geod. Kugel, zusammenfällt, so wird $n^2\,df = w^2\,d\omega$ sein (siehe (22) § 4 I). Ausserdem können wir hier $w' = w_1 = w$ setzen. Statt (1) folgt dann entgültig

$$u(P_0') = \frac{ipB}{\lambda}\, e^{i\omega t} \int_{F_1} e^{ikp(E-E')}\, d\omega. \tag{2}$$

Es kommt jetzt also nur noch auf die Berechnung von $E - E'$ an. Hierbei setzen wir, wie in § 3 die Strecke $P_0P_0' = r$ sehr klein im Vergleich zu E voraus. Beachten wir ferner, dass die geod. Länge der Extremale P_0A' ebenfalls gleich E sein wird, so können wir auf Grund der Variationsrechnung und der Fig. 4 schreiben

$$E - E' = r\left\{\frac{dE}{dx'}\cos\delta + \frac{dE}{dy'}\sin\delta\right\} \tag{3}$$

da sich hierbei nur der eine Endpunkt der Extremale von P_0 nach P_0' verschiebt.

Weiter folgt auf Grund von (7) § 4 I, der Fig. 3 und den Erörterungen des vorhergehenden §

$$\begin{cases} \dfrac{dE}{dx'} = n_0 \dot{x}' = n_0 \sin\alpha\cos\eta \\ \dfrac{dE}{dy'} = n_0 \dot{y}' = n_0 \sin\alpha\sin\eta \end{cases} \tag{4}$$

wo also n_0 den Brechungsexponenten im Punkte P_0 bedeutet.

Deshalb statt (3)

$$E - E' = rn_0 \sin\alpha\cos(\eta - \delta) \tag{5}$$

und ausserdem wird augenscheinlich sein

$$d\omega = \sin\alpha\, d\alpha\, d\eta. \tag{6}$$

Nun trittt in Kraft das Resultat des vorigen § 4. Eine Linie, die C mit dem Rand der Öffnung verbindet, beschreibt beim Umlauf dieses Randes einen Kreiskegel. Dasselbe wird also auch für den Winkel $\alpha = \alpha_1$ gelten, bei der Änderung von η von O bis 2π.

Setzen wir deshalb (5) und (6) in (2) ein, so können wir nach η integrieren und erhalten

$$u(P_0') = \frac{2\pi Bipe^{i\omega t}}{\lambda} \int_0^{\alpha_1} J_0(n_0 krp \sin\alpha) \sin\alpha\, d\alpha. \tag{7}$$

Da nun α klein angenommen, wir also α statt sin α setzen können, so folgt weiter aus (7)

$$u(P_0') = \frac{2\pi Bip\alpha_1 e^{i\omega t}}{\lambda n_0 krp} J_1(n_0 krp\alpha_1) = \frac{Bipk\alpha_1^2 e^{i\omega t}}{2} g(z) \tag{8}$$

wobei

$$z = krp\alpha_1 = \frac{2\pi\alpha_1 prn_0}{\lambda} \tag{9}$$

und

$$g(z) = \frac{2J_1(z)}{z} \tag{10}$$

bedeuten.

Da nun die Lichtintensität proportional zu g^2 sein wird, so ersehen wir aus (10), dass wir die bekannte Lichtverteilung in der Einstellebene des Objektivs erhalten, nur mit dem Unterschied, dass hier an Stelle von λ die der Wert $\frac{\lambda}{pn_0}$ stehen wird.

§ 6. Einige Bemerkungen

Auf Grund der §§ 3 und 4 I ergibt sich für die Normalengeschwindigkeit V der Front der Störung

$$V = \frac{c}{n}. \tag{1}$$

Um die Phasengeschwindigkeit V_1 z. B. für (8) § 2 zu berechnen, differentiieren wir die Phase und erhalten, unter Annahme ihrer Konstanz

$$\omega dt = pkdE = nkpds \tag{2}$$

woraus sich V_1 berechnet zu

$$V_1 = \frac{c}{pn}. \tag{3}$$

Ferner haben wir laut (18) § 8 I

$$\bar{L} = \frac{\lambda}{\pi b n_1} = \frac{m}{k}. \tag{4}$$

Für den Brechungsexponenten (1) § 3 ist nun $p > 1$ demnach immer

$$V_1 < V. \tag{5}$$

Gehen wir nun zu dem Brechungsexponenten (9) § 1 über so wird dabei

$$p = \sqrt{1 - \frac{m^2}{k^2}}. \tag{6}$$

Hier haben wir aber keine räumliche Periode, aber das Verhältniss $\frac{m}{k}$ bleibt dasselbe wie in (4). Demnach ist hier $p < 1$ und also

$$V_1 > V. \tag{7}$$

Nun ist klar, dass bei kurzen Wellen (Lichtwellen) der Ausdruck (4) äusserst klein sein wird, so dass wir in beiden Fällen $p = 1$ setzen können und deshalb

$$V = V_1 \tag{8}$$

annehmen dürfen.

Der Unterschied zwischen diesen beiden Fällen ist nun der, dass bei (8) § 1 die Welle nach einer Zeit

$$t_1 = \frac{L}{2\pi c} = \frac{\pi b n_1}{2\pi c} = \frac{b n_1}{2c} = \frac{1}{mc} \tag{9}$$

in den Ausgangspunkt zurückkehren wird, wie dies aus der Bemerkung am Schluss des § 9 1 erhellt. Bei dem Brechungsexponent (9) § 1 erreicht die

Welle erst nach unendlich langer Zeit die Grenzkugel mit dem Radius b (Fig. 10 § 10 I).

Kehren wir nun zu dem Resultat des vorigen § zurück, so ersehen wir, dass wegen (8) (also $p = 1$) der Ausdruck (10) § 5 sich von dem gewöhnlichen nur dadurch unterscheidet, dass $\frac{\lambda}{n_0}$ an Stelle von λ steht.

Es kommt aber hier noch die Verschiebung P_0C hinzu. Ist $\varepsilon = 0$ (Fig. 3) so fällt P_0C in die Richtung der Achse CA des Objektivs. Die seitliche Ablenkung ist demnach am grössten, wenn $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ sein wird, also falls CA senkrecht zu der X-Achse ist, d. h. senkrecht zu der Verbindungslinie zwischen dem Punkt P_0 und dem Mittelpunkt der Zentralsymmetrie des Brechungsexponenten. $\left(\text{Angenähert haben wir } P_0C = \frac{f^2}{2a}\right)$

Genau dasselbe ergibt sich auch (bei $p = 1$) für den Brechungsexponent (9) § 1.

Leningrad, April 1932.

В. С. ИГНАТОВСКИЙ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН И ДИФРАКЦИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

РЕЗЮМЕ

Данная работа служит продолжением моей предыдущей работы* и имеет своей целью исследование распространения волн в неоднородной изотропной среде.

Вычислен интеграл Кирхгоффа для чисто периодического состояния по времени для уравнения волны предыдущей работы, а также исследована дифракция объектива для разобранного раньше коэффициента преломления.

---

* ИМЕН, 1932, № 7, стр. 857.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ФОРМУЛЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЧЕБЫШЕВА

С. Н. БЕРНШТЕЙНА

Настоящая заметка имеет целью обосновать утверждение, высказанное мною в беседе с А. Н. Крыловым, что формула приближенного интегрирования Чебышева

$$(1) \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)$$

ни при каких значениях x_i на промежутке (01) не может быть точной для произвольно заданного многочлена степени n, если только n достаточно велико.

Как известно, указанная формула практически полезна для малых значений n; но то обстоятельство, что при $n = 8$ формула (1) не пригодна благодаря тому, что точки x_i оказываются комплексными (хотя при $n = 9$ они снова становятся действительными), для больших значений n является общим правилом. Косвенный прием, посредством которого это будет доказано, не имеет целью установления возможно низкой границы значений n, для которых формула Чебышева перестает быть пригодной на вещественном отрезке, так как для упрощения общего вывода я предпочитаю избегать излишних вычислений.

Докажем сначала, что если все значения x_i были бы на отрезке 01, то при n весьма большом распределение их на этом отрезке стремилось бы стать равномерным. Точнее говоря, обозначая через $\varphi(a)$ число точек $x_i < a$, имеем неравенство[1]

[1] Заметим, что неравенство (2) справедливо для любой формулы приближенного интегрирования

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_1^n A_i f(x_i),$$

пригодной для всех полиномов степени n, полагая $\varphi(a) = \Sigma A_i$, где сумма распространена на все i, для которых $x_i < a$ (при условии $A_i > 0$).

$$(2)\qquad \left|\frac{\varphi(a)}{n}-a\right|<\frac{1.08}{\sqrt{n}}.$$

Действительно, если формула (1) точна для многочлена степени n, то для любой функции $f(x)$ имеем

$$\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)=\int_0^1 [f(x)-P_n(x)]\,dx-\frac{1}{n}\sum_1^n [f(x_i)-P_n(x_i)],$$

где $P_n(x)$ многочлен степени n, наименее уклоняющийся от $f(x)$ на отрезке 01. Поэтому, если $E_n f(x)$ означает наилучшее приближение $f(x)$ на отрезке 01, имеем для всякой функции

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)\right|<2\,E_n f(x).$$

Применим это неравенство к непрерывной функции $f(x)$, определенной следующим образом

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{|a+\delta-x|-|a-x|}{2\delta},$$

(так что, при $x<a$, $f(x)=1$, а при $x>a+\delta$, $f(x)=0$).

В данном случае имеем, как известно,

$$2E_n f(x)>\frac{0.58}{n\delta},$$

поэтому

$$\left|a+\frac{\delta}{2}-\frac{\varphi(a+\theta\delta)}{n}\right|<\frac{0.58}{n\delta}\quad(0\leqslant\theta<1)$$

и тем более

$$\frac{\varphi(a)}{n}-a-\frac{\delta}{2}<\frac{0.58}{n\delta},$$

$$a+\frac{\delta}{2}-\frac{\varphi(a+\delta)}{n}<\frac{0.58}{n\delta}.$$

При

$$\delta=\frac{1.1}{\sqrt{n}}$$

получим из первого неравенства

$$\frac{\varphi(a)}{n} - a < \frac{1.08}{\sqrt{n}},$$

и полагая во втором неравенстве

$$a + \delta = b$$

$$b - \frac{\delta}{2} - \frac{\varphi(b)}{n} < \frac{0.58}{n\delta},$$

получим

$$b - \frac{\varphi(b)}{n} < \frac{1.08}{\sqrt{n}}.$$

Заменим промежуток интегрирования 01 промежутком $(-1,1+\alpha)$, где α данная весьма малая величина. Вследствие (2) число h точек x_i в промежутке $1,1+\alpha$ равно

$$h = \frac{\alpha n}{\alpha + 2} + \theta\sqrt{n} < \frac{\alpha n}{\alpha + 2} + 1.08\sqrt{n},$$

так как $|\theta| < 1.08$.

Положим

$$S_n(x) = T_{n-2h}(x)\, Q_h^2(x),$$

где

$$T_m = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^m + (x-\sqrt{x^2-1})^m}{2} = \cos m \arccos x,$$

$$Q_h(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_h),$$

обозначая через $x_1, \cdots x_h$ точки x_i в формуле интегрирования Чебышева, находящиеся в промежутке $(1,1+\alpha)$. Покажем, что формула Чебышева не может быть применима к многочлену $S_n(x)$, при больших значениях n.

Действительно,

$$\left|\int_{-1}^{1} S_n(x)\,dx\right| < \int_{-1}^{+1} Q_h^2(x)\,dx < \int_{-1}^{1+\alpha} (x-1-\alpha)^{2h}\,dx = \frac{(2+\alpha)^{2h+1}}{2h+1}.$$

С другой стороны

$$\int_{1}^{1+\alpha} S_n(x)\,dx > \frac{1}{2}\int_{1}^{1+\alpha} (x+\sqrt{x^2-1})^{n-2h}\, Q_h^2(x)\,dx.$$

Но вследствие очевидного обобщения классической теоремы Чебышева многочлен $Q_h(x)$ не может оставаться по абсолютному значению менее

$$2\left(\frac{b}{4}\right)^h$$

ни на какой совокупности промежутков, общая длина которых равна b. Поэтому, если на отрезке длины α выделены все промежутки, где

$$\left|Q_h(x)\right| \leqslant 2\left(\frac{\lambda\alpha}{4}\right)^h,$$

то сумма их не превысит $\lambda\alpha$, и останутся промежутки, общая длина которых не менее $(1-\lambda)\alpha$, где

$$\left|Q_h(x)\right| > 2\left(\frac{\lambda\alpha}{4}\right)^h.$$

Таким образом, полагая

$$\frac{n-2h}{h} = p,$$

$$\int_1^{1+\alpha} S_n(x)\,dx > 2\int_1^{1+\alpha} (x+\sqrt{x^2-1})^{n-2h}\left(\frac{x-\alpha-1}{4}\right)^{2h} dx =$$

$$= 2\int_0^{\alpha}\left(\frac{\alpha-z}{4}\right)^{2h}\left(1+z+\sqrt{z(2+z)}\right)^{n-2h} dz >$$

$$> 2\int_{\frac{\alpha-2.1\sqrt{2\alpha}}{p}}^{\frac{\alpha-2\sqrt{2\alpha}}{p}}\left(\frac{\alpha}{2p^2}\right)^h\left(1+z+\sqrt{z(2+z)}\right)^{ph} dz >$$

$$> \frac{\sqrt{2\alpha}}{5p}\left[\frac{\alpha}{2p^2}\left(1+\sqrt{2\left(\alpha-\frac{2.05}{p}\sqrt{2\alpha}\right)}+\alpha\frac{2.05}{p}\sqrt{2\alpha}\right)^p\right]^h >$$

$$> \frac{\sqrt{2\alpha}}{5p}\left[\frac{\alpha}{2p^2}\left(1+\sqrt{2\alpha}-\frac{1.03}{p}\right)^p\right]^h = \frac{1}{30p}\left[\frac{1}{144p^2}\left(\frac{7}{6}-\frac{1.03}{p}\right)^p\right]^h >$$

$$> \frac{1}{30p}(4.12)^h,$$

полагая

$$\alpha = \frac{1}{72},\quad p \geqslant 108.$$

Но приближенная сумма Чебышева

$$\frac{2+\alpha}{n}\sum_{1}^{n}S_n(x_i)=\frac{2+\alpha}{n}\sum_{h+1}^{n}T_{n-2h}(x_i)\,Q^2{}_h(x_i)<\frac{2+\alpha}{n}\sum_{1}^{n}Q_h{}^2(x_i)=$$

$$=\int_{1}^{1+\alpha}Q_h{}^2(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_{-1}^{1+\alpha}(\alpha+1-x)^{2h}\,dx=\frac{(2+\alpha)^{2h+1}}{2h+1}.$$

Поэтому

$$(3)\qquad R=\int_{-1}^{1+\alpha}S_n(x)\,dx-\frac{2+\alpha}{n}\sum_{1}^{n}S_n(x_i)>$$

$$>\frac{1}{30p}\left[\frac{1}{144p^2}\left(\frac{7}{6}-\frac{1.03}{p}\right)^p\right]^h-\frac{2}{2h+1}\left(2+\frac{1}{72}\right)^{2h+1}.$$

Поэтому, принимая во внимание, что

$$p>\frac{(2-\alpha)\sqrt{n}-2.16\,(2+\alpha)}{\alpha\sqrt{n}+1.08\,(2+\alpha)}$$

заключаем, что если положить

$$n\geqslant 250.000,$$

то

$$p>\frac{1000-11.29}{9.115}>108.$$

Следовательно при

$$n\geqslant 250.000\left(\alpha=\frac{1}{72}\right)$$

имеет место неравенство

$$(4)\qquad R>\frac{(4.12)^h}{3240}-\frac{2}{h}(4.03)^h>4^h,$$

где

$$h>\frac{n}{150}.$$

Тот же прием приводит к заключению, что как бы мало ни было определенное число ρ, формула (1) не может быть точной для всех полиномов степени ρn, если n становится весьма большим.

Кроме того, наше заключение остается в силе, если в формуле (1) вторую часть заменить

$$\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} A_i f(x_i),$$

где все A_i удовлетворяют неравенствам

$$M > A_i > m > 0.$$

Полученный результат, представляющий только теоретический интерес, приводит к постановке двух вопросов: 1) каково наибольшее значение n, при котором формула Чебышева применима на вещественном отрезке? 2) Каково асимптотическое распределение точек x_i в комплексной области, когда n бесконечно возрастает?

Неравенство (2), которое играло существенную роль в нашем доказательстве, может быть уточнено; благодаря этому улучшится и неравенство.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{(2s+1)^{2s+1}}{(2s+1)!}\Delta_{z=0}^{(2s+1)}\left|x-z\right|^{2s+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2s+1)^{2s+1}}{(2s+1)!}\left[\left|x-1\right|^{2s+1} - (2s+1)\left|x-\frac{2s}{2s+1}\right|^{2s+1} + \right.$$

$$\left. + \cdots - |x|^{2s+1}\right].$$

Очевидно, при

$$x \leqslant 0,\ f(x) = \frac{1}{2},$$

а при

$$x \geqslant 1,\ f(x) = -\frac{1}{2},$$

и кроме того функция $f(x)$ на отрезке 01 кососимметрична относительно точки $x = \frac{1}{2}$,

и вообще

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

С другой стороны, разлагая

$$|\cos\theta|^{2s+1}$$

в ряд Фурье, имеем

$$|\cos\theta|^{2s+1} = \frac{4}{\pi}(2s+1)! \sum A_p \cos 2p\theta,$$

где

$$A_p = \pm \frac{1}{(2p-2s-1)\cdots(2p+2s+1)}.$$

Поэтому приближение $I_n|\cos\theta|^{2s+1}$, доставляемое конечной суммой Фурье порядка n, равно

$$I_n|\cos\theta|^{2s+1} = \frac{2.2s!}{\pi(n-2s+1)(n-2s+3)\cdots(n+2s+1)}.$$

Следовательно, тем более, наилучшее приближение

$$E_n|x|^{2s+1}$$

на отрезке $(-1, +1)$ при помощи многочленов степени n удовлетворяет неравенству

$$E_n|x|^{2s+1} < \frac{2.2s!}{\pi(n-2s+1)\cdots(n+2s+1)} <$$

$$< \frac{2.2s!}{\pi(n+1)^{2s+1}\left[1-\left(\frac{2s}{n+1}\right)^2\right]^s};$$

поэтому соответствующее приближение на любом отрезке $(-\alpha, \beta)$, где

$$0 < \alpha \leqslant L,\ 0 < \beta \leqslant L,$$

будет меньше, чем

$$\frac{2.2s!}{\pi\left[1-\left(\frac{2s}{n+1}\right)^2\right]^s}\left(\frac{L}{n+1}\right)^{2s+1}.$$

Поэтому, каков бы ни был отрезок длины L, включающий в себя промежуток 01, наилучшее приближение на нем функций $f(x)$ будет менее, чем

$$\frac{1}{\pi\left(2s+1\left[1-\left(\frac{2s}{n+1}\right)^2\right]^s\right.}\left[\frac{2L(2s+1)}{n+1}\right]^{2s+1}.$$

Уменьшая все масштабы в L раз, можем использовать соответствующую функцию

$$f(x)+\frac{1}{2},$$

которая в промежутке $(0a)$ равна 1, а в промежутке $(b1)$, где

$$b-a=\delta=\frac{1}{L},$$

равна нулю, заметив, что наилучшее приближение ее на всем отрезке (01) удовлетворит тому же неравенству. Таким образом, повторяя рассуждение, сделанное нами вначале, приходим к неравенству

$$\left|a+\frac{\delta}{2}-\frac{\varphi(a+\theta\delta)}{n}\right|<\frac{2}{\pi(2s+1)\left[1-\left(\frac{2s}{n+1}\right)^2\right]^s}\left[\frac{4s+2}{\delta(n+1)}\right]^{2s+1}=$$

$$=\frac{\lambda}{[\delta(n+1)]^{2s+1}},$$

и полагая

$$\delta^{2s+2}=\frac{(4s+2)\lambda}{(n+1)^{2s+1}},$$

находим

$$\left|a-\frac{\varphi(a)}{n}\right|<\sqrt[2s+2]{\frac{(4s+2)\lambda}{(n+1)^{2s+1}}}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4s+2}\right]=$$

$$=\frac{s+1}{2s+1}\frac{(4s+2}{n+1}\sqrt[2s+2]{\frac{2n+2}{\pi(2s+1)\left[1-\left(\frac{2s}{n+1}\right)^2\right]^s}}<$$

$$<\frac{2(s+1)}{n+1}\left[\frac{2n+2}{\pi(2s+1)}\right]^{\frac{1}{2s+2}}\left[1-\left(\frac{2s}{n+1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Выбирая s так, чтобы возможно снизить верхнюю границу, полагаем

$$2s+4=[\log(n+1)].$$

Тогда

$$\left|a-\frac{\varphi(a)}{n}\right|<$$

$$<\frac{[\log(n+1)]-2}{n+1}\left[\frac{n+1}{e^2}\right]^{\frac{1}{2s+2}}\left[\frac{2e^2}{\pi(2s+1)}\right]^{\frac{1}{2s+2}}\left[1-\left(\frac{2s}{n+1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\leqslant$$

(2 bis)

$$\leqslant\frac{e}{n+1}\log\frac{n+1}{e^2}\left[\frac{2e^2}{\pi(2s+1)}\right]^{\frac{1}{2s+2}}\left[1-\frac{2s^2}{n+1}\right]^{-\frac{1}{2}}<$$

$$<\frac{e}{n+1}\log\frac{n+1}{e^2}<\frac{e}{n}\log\frac{n}{e^2},$$

если $n\geqslant 3000$. Это и есть неравенство, которое мы хотели получить.

Воспользовавшись этим неравенством (2 bis) вместо (2), находим, что

$$p=\frac{n}{h}-2>\frac{1}{\frac{\alpha}{2+\alpha}+\frac{e}{n}\log\frac{n}{e^2}}-2.$$

В частности, полагая

(5) $$\alpha=\frac{1}{72},\ n=15000,$$

имеем

$$p+2>120.$$

Согласно предыдущему (3),

$$R>\frac{1}{12540}\left(18{,}2\right)^h-\frac{2}{h}(4{,}03)^h>4^h,\ \text{т. к. } h>120$$

Следовательно, для значений $n\geqslant 15000$ формула Чебышева, во всяком случае, неприменима.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

UNE MÉTHODE POUR ACCROÎTRE LE NOMBRE DES DÉCIMALES D'UNE TABLE

Par J. BEZIKOVIČ

(Presenté par A. Krylov, *membre de l'Académie des Sciences)*

Ayant une table des valeurs d'une fonction calculées à un certain nombre de décimales près, s'il est nécessaire de dresser la même table avec un nombre de décimales supérieur, on calcule ordinairement toutes les valeurs de la fonction à neuf. Ce calcul, effectué à l'aide de séries, est en général assez pénible. La méthode que je propose permet de commencer le calcul en partant de la table donnée, par la détermination directe des décimales qui suivent les décimales données par la table.

Cette méthode exige que la fonction soit déterminée (s'il est possible) par une équation différentielle ou intégrale. Si c'est une équation du 1-r ordre

$$y' = f(x, y),$$

les valeurs de la fonction y peuvent être déterminées par la méthode qui s'en suit du théorème d'existence de M. Picard — par approximations successives

$$y_1 = y_0 + \int_x^{x+h} f(x, y_0)\, dx$$

$$y_2 = y_0 + \int_x^{x+h} f(x, y_1)\, dx$$

. . . . . .

en partant des valeurs de la fonction données par la table. Les intégrations nécessaires sont éffectuées par des méthodes approchées (Stirling, Bessel).

Le théorème d'existence, permettant d'apprécier la convergence, donne en outre le nombre des intégrations successives nécessaires pour déterminer le nombre des décimales voulu. D'ailleurs la méthode qui découle

du théorème d'existence n'exige point d'appréciation des erreurs: en donnant des décimales qui se reproduisent identiquement, l'intégration répétée fournit d'elle-même un moyen pour s'assurer du dégré de précision atteint par le calcul.

Il est évident que la même méthode s'applique aussi bien au cas d'une équation différentielle d'un dégré supérieur.

La méthode du calcul des fonctions par leurs équations différentielles peut être appliquée aussi pour dresser des tables à neuf. Dans ce cas l'intégration de l'équation s'effectue à l'aide de la méthode de Störmer et toutes les autres valeurs approchées se déterminent par la méthode exposée.

Exemple. Soit à transformer une table des sinus naturels à 4 decimales en une table à 8 décimales.

La fonction $\sin x$ peut être définie par l'équation différentielle:

$$y'' + y = 0$$

et par les conditions initiales:

$$y_0 = \sin 25°40' = 0.43313478586696$$
$$y_0' = \cos 25°40' = 0.90132916014455.$$

En posant

$$y' = z$$

on obtient le système suivant pour déterminer la fonction

$$z' + y = 0$$
$$y' = z$$

où

$$y' = z$$
$$z' = -y.$$

Donc les valeurs de la fonction en question se déterminent par les intégrations correspondantes

$$y = y_0 + \int_x^{x+h} z\,dx$$

$$z = z_0 - \int_x^{x+h} y\,dx.$$

Les tables à quatre décimales donnent:

$$\sin 25°40' = 0.4331$$
$$\sin 25°50' = 0.4358$$

et pour les cosinus

$$\cos 25°40' = 0.9013$$
$$\cos 25°50' = 0.9001.$$

En prenant 10″ pour l'intervalle h et en l'exprimant en mesures radiales, on a

$$h = 0.0000484814.$$

Les tables à quatre décimales donnent:

i	x_i	$y_{i.1}$	$z_{i.1}$
1	25°40′10″	0.4331	0.9013
2	20	0.4332	0.9013
3	30″	0.4332	0.9012
4	40″	0.4332	0.9012
5	50″	0.4333	0.9012
6	41′00″	0.4333	0.9012
7	10″	0.4333	0.9012
8	20″	0.4334	0.9011
9	30″	0.4334	0.9011
10	40″	0.4334	0.9011
11	50″	0.4335	0.9011
12	42′00″	0.4335	0.9011

Calculons

$$\sin 25°40'10''.$$

On a

$$y_{1.2} = y_0 + \int_x^{x+h} z_{1.1}\,dx =$$

$$0.433134786 - 0.9013.\ 0.0000484814 = 0.433134786 - 0.000043696 =$$
$$= 0.433178482.$$

Pour l'approximation suivante il faut déterminer la valeur de $z_{1.2}$; on a

$$z_{1.2} = z_0 - \int_{x_0}^{x_0+h} y_{1.2}\,dx =$$

$$= 0.901329160 - 0.43320 \cdot 0.0000484814 = 0.901308158.$$

L'approximation suivante s'obtient par la première intégration répétée, en substituant à z sa nouvelle valeur on a

$$y_{1.2} = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} z_{1.2}\, dx = 0.433178483.$$

Il est évident que les intégrations répétées dans les limites des six premières décimales ne changeront plus les valeurs de z; donc en répétant ces intégrations pour $\sin 25°40'10''$, nous retrouverons toujours les mêmes chiffres.

Les calculs des valeurs des sinus pour les intervalles de $10''$ jusqu'à $25°42'$ sont donnés par les tables suivantes, qu'on dresse parallèlement:

i	x_i	z_{i1}	y_{i2}	z_{i2}	y_{i3}
1	25°40′10″	9013	0.433178482	0.901308158	0.433178483
2	20″	3	0.433222178	0.901287156	0.433222179
3	30″	2	0.433265865	0.901266151	0.433265873
4	40″	2	0.433309560	0.901245144	0.433309567
5	50″	2	0.433353251	0.901224135	0.433353260
6	41′00″	2	0.433396942	0.901203123	0.433396952
7	10″	2	0.433440633	0.901182109	0.433440642
8	20″	1	0.433484319	0.901161993	0.433484382
9	30″	1	0.433528005	0.901140975	0.433528021
10	40″	1	0.433571691	0.901119955	0.433571709
11	50″	1	0.433615377	0.901098933	0.433615395
12	42′00″	1	0.433659063	0.901077909	0.433659081

i	x_i	y_{i2}	z_{i2}
1	25°41′10″	0.433178482	0.901308158
2	20″	0.433222178	0.901287156
3	30″	0.433265865	0.401266151
4	40″	0.433309560	0.901245144
5	50″	0.433353251	0.901224135
6	41′00″	0.433396942	0.901203123
7	10″	0.433440633	0.901182109
8	20″	0.433484319	0.901161993
9	30″	0.433528005	0.901140975
10	40″	0.433571691	0.901119955
11	50″	0.433615377	0.901098933
12	42′00″	0.433659063	0.901477909

Il est évident, que les intégrations répétées ne changeront point les huit premières décimales de la table; donc on peut être sûr que le calcul est terminé.

Il est à mentionner que la table auxiliaire peut servir en outre pour la détermination du $\cos x$.

S'il fallait passer d'une table à l'autre sans changer l'intervalle, donc sans le faire moindre, — le procédé reste le même, seulement le nombre des intégrations répété serait supérieur.

Soient données les valeurs d'une fonction de Bessel, déterminées par l'équation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + y = 0$$

et les conditions initiales

$$y_0 = 1 \quad y'_0 = 0 \quad x_0 = 0.$$

Soient données ces valeurs par la table:

x	y	x	y
0	1.00000	0.1	0.99750
0.2	0.99002	0.3	0.97763
0.4	0.96040	0.5	0.93847
0.6	0.91201	0.7	0.88120
0.8	0.84629	0.9	0.80752
1.0	0.76520		

Introduisons une nouvelle fonction:

$$z = xy'.$$

L'équation donnera

$$z' = -xy$$

et par des approximations successives, nous trouverons y au moyen d'une intégration parallèle:

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{z_n}{x}\, dx$$

$$z_{n+1} = z_0 - \int_{x_0}^{x} xy_n\, dx.$$

Les valeurs de z avec 5 décimales peuvent être prises, pour ne pas les calculer, dans les tables des fonctions de Bessel car

$$z = xy' = xJ_0' = -xJ_1$$

En nous servant de ces valeurs et en intégrant les équations nous obtenons les résultats donnés dans la table qui suit

x	y_1	$\frac{z_1}{x}$	Δ	Δ^2	Δ^3	y_2
0	1	0	— 0.04994	0.00038	0.00036	1
0.1	0.99750	— 0.04994	4956	074	37	0.9975013
0.2	0.99002	09950	4882	111	36	0.9900246
0.3	0.97763	14832	4771	147	34	0.9776259
0.4	0.96040	19603	4624	181	32	0.9603976
0.5	0.93847	24227	4443	213	33	0.9384689
0.6	0.91201	28670	4230	246	27	0.9120042
0.7	0.88120	32900	3984	273	28	0.8812007
0.8	0.84629	36884	3711	301		0.8462873
0.9	0.80752	40595	3410			0.8075227
1.0	0.76520	44005				0.7651973

Ainsi la première approximation, l'intervalle étant considérable, nous donne déjà 6 décimales.

Я. С. БЕЗИКОВИЧ. МЕТОД НАРАЩИВАНИЯ ЧИСЛА ДЕСЯТИЧНЫХ ЗНАКОВ ТАБЛИЦЫ

РЕЗЮМЕ

При вычислениях таблиц какой-либо функции обычно применяют ряды. Если при этом уже существуют таблицы функции, но с меньшим числом знаков, то метод рядов не дает возможности воспользоваться уже готовыми знаками: все вычисления приходится проводить сызнова.

Если табулируемую функцию определить дифференциальным или интегральным уравнением, то имеющиеся значения функции можно принять за первые приближения, и требуемая точность может быть получена методом последовательных приближений численного интегрирования дифференциальных уравнений.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Отделение математических и естественных наук

Classe des sciences mathématiques et naturelles

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И H^+-КОНЦЕНТРАЦИИ В БОЛЬШИХ ПРЕДЕЛАХ ПУТЕМ ИХ РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ НА ПРОЦЕССЫ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

А. С. ВАСИЛЬЕВА и Е. Н. ВАСИЛЬЕВОЙ

Представлено академиком А. Е. Ферсманом

§ 1. Весной 1914 г. в [illegible] в Петровской оранжерее наблюдения над изменением окраски цветов гортензии в двух экземплярах А. С. Васильевой на большом письменном экземпляре и первом экземпляре Е. Н. Васильевой на большом пишущем. Расстояние между экземплярами [illegible] в широте [illegible] в = [illegible]

В результате наблюдений и обработки этих наблюдений в 1914 г. были представлены и частью опубликованы ими 1) кривые изменений z—z, широты по наблюдениям А. С. Васильевой на письменном экземпляре, 2) кривые изменений z—z, широты для того же времени по наблюдениям на пишущем экземпляре, вырабатывавшиеся также А. С. Васильевой и опубликованные Е. Н. Васильевой, 3) описание обработки материалов и 4) полученные окончательные выводы.[1]

Принимая во внимание все [illegible] Международной службы широт, мы считали себя вправе ожидать получения конечных выводов по наблюдениям как на двух пишущих инструментах с одним и тем же часом и одним и тем же ухом и измерениями одной и той же переменной величины z—z, полюсной широты. Понятно, что личные расстояния на письменном инструменте и первом экземпляре пишущего должны были быть равными. Отступления от Международной службы широт имеются существенные отличия в обработке материала.

[1] Изв. Акад. Наук СССР, сер. VI, 1917, VI, 361.

[2] А. С. Васильева, Влияние различных положений на широты, определенные в [illegible] гг. в Пулкове, Изв. Акад. Наук, 1916, № 10.

Сравнение привело нас к таким выводам: «Кривая с наибольшими амплитудами получается из наблюдений пассажным иструментом в первом вертикале, кривая с несколько меньшими амплитудами получается из наблюдений Пулковским зенит-телескопом, а колебания с еще меньшими амплитудами получаются из результатов Международной Службы широт. В этой последовательности влияние метода обработки наблюдений выступает явно».[1] Различия мы представили там в таблицах и на диаграмме.

Такое точно соотношение амплитуд колебаний получилось у нас и для наблюдений в Казани 1892,5—1900,8 гг. (зенит-телескоп) при сравнении их результатов с результатами МСШ[2]. Давно известно, что кривая колебаний широты, составленная для какого-либо места по данным МСШ отличается от кривой колебаний, полученной в результате подлинных в этом месте наблюдений над широтою; известны и изменения амплитуд колебаний во времени, но совершенной новостью явился факт систематической разницы между значениями колебаний, даваемыми в одном и том же месте параллельно двумя инструментами. Разности *ПИ—ЗТ* имеют по своему ходу характер систематический, выражаются в сотых долях секунды дуги, но доходят иногда до десяти и четырнадцати сотых секунды дуги даже в итоговых, в сводных кривых колебаний широты, составляемых обычно через 0.1 года.

Факт этот важен потому, что размер колебаний $\varphi - \varphi_0$ необходим при всех точных астрономических определениях: при определениях широты места и азимута, значит и при определениях моментов времени, долгот, при определениях положений звезд, и т. д.

Учитывая это, мы тогда же, в 1914 г., объяснили и причину явления: «Невозможно представить ни одной причины, которая в первом вертикале могла бы искажать значения широты в сторону увеличения отклонений $\varphi - \varphi_0$ как раз в эпохи максимума и минимума. И в то же время в обработке наблюдений, полученных на зенит-телескопе, причины, сглаживающие кривую колебаний, так ясны и так многочисленны».[3]

Отсюда вытекала необходимость усиления внимания к обоим методам наблюдения.

§ 2. **Исследование проф. А. Я. Орлова.** Выведенные нами $\varphi - \varphi_0$ из наблюдений 1908,6—1911,5 были в 1924 г. использованы проф. А. Я. Орловым с целью исследования периодов колебаний. Проф. А. Я. Орлов сообщает,

[1] Изв. Акад. Наук, 1916, № 16, стр. 1609.
[2] Там же, стр. 1613.
[3] Там же, стр. 1614.

что у него из старых наблюдений 1890,4—1893,4 гг. на Пулковском же пассажном инструменте в первом вертикале получилось:[1]

$$\text{годовая волна } A = 0''.092 \cos (36^\circ t + 96^\circ) \text{ и}$$

$$\text{волна } 14^1/_2\text{-месячная } C = 0''.210 \cos (30^\circ.25\, t + 163^\circ)$$

в предположении, что период последней постоянен и равен 1.19 г.

Время t в этих формулах показано в десятых долях года, считая от 1890,0 г.

Затем была составлена для значений $\varphi - \varphi_0 = A + C$ — эфемерида Орлова на эпоху наблюдений А. С. Васильева 1908,6—1911,5 гг.

В статье проф. А. Я. Орлова напечатаны значения $\varphi - \varphi_0$ по его эфемериде через десятую долю года и рядом наши $\varphi - \varphi_0$, опубликованные нами в 1914 г. по наблюдениям на пассажном инструменте в 1-м вертикале и на зенит-телескопе в нашей же обработке. Это сопоставление заключено в статье А. Я. Орлова словами: «Согласие вычисленных и наблюденных фаз широты, несмотря на отдаленность эпох, настолько хорошо, что нет пока оснований изменять принятое нами значение периода Чандлера. Интересно отметить, что наблюдения на зенит-телескопе лучше согласуются с эфемеридой».

§ 3. **Установка темы исследования.** «Наблюдения на зенит-телескопе лучше согласуются с эфемеридой» — заключение проф. А. Я. Орлова. Оно совершенно совпадает с выводом нашим, сделанным в 1914 г.: «Наиболее от МСШ отличаются результаты наблюдений на пассажном инструменте в первом вертикале и менее на зенит-телескопе». Но мы тогда же указали и причину факта. Причина сообщена выше в § 1.

Так как в истории пассажного инструмента в первом вертикале имеются многолетние ряды[2] наблюдений неудачных (1869—1872 Нюрена, и 1893—1895 Костинского), так как кроме того имеются загадки неразъясненные или разъясненные нами же после 1924 г.,[3] то на этом фоне заключение проф. А. Я. Орлова выступает как бы отрицанием наших выводов 1914 г. о бо́льшей чем зенит-телескоп чувствительности пас-

[1] Циркуляр Одесск. астрон. обсерв., № 6. Период Чандлера по наблюдениям Ванаха, Костинского и Васильева в Пулкове в первом вертикале.

[2] См. А. С. Васильев. 70 лет истории Пулковского пассажного инструмента в первом вертикале. Изв. Русск. астр. общ., 1912.

[3] А. С. Васильев. Нереальная оценка точности нивеллирований горизонтальной оси в пассажных инструментах; он-же. Условия надежного нивеллирования горизонтальной оси в пассажных инструментах. Изв. Акад. Наук СССР, 1928, стр. 151—172, 215—240, 303—318, 319—346.

сажного инструмента в первом вертикале к наблюдаемому явлению. После новой такой постановки вопроса нам кажется, что наше то исследование и те заключения необходимо углубить и сделать неоспоримо ясными.

§ 4. **Общая оценка выводов.** Если сходимость эфемериды (теории) с наблюдениями оценивать, как делают обычно, подсчетом суммы квадратов уклонений наблюденных $\varphi - \varphi_0$ от эфемериды, то мы имеем:

ПИ — О в 1890,5—1893, 4	$22 \cdot [\lambda\lambda] = 0.0617$	$\sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n}} = \pm 0''.045$
ПИ — О в 1908,6—1911,5	$= 0.1225$	± 0.064
ЗТВ — О в 1908,6—1911,5	$= 0.0506$	± 0.041

Заключение проф. А. Я. Орлова подтверждается полностью: $[\lambda\lambda] = 0.1225$ и $[\lambda\lambda] = 0.0506$, и кроме того эфемерида, построенная на наблюдениях не зенит-телескопа и даже совсем другой эпохи, согласуется через 20 лет с зенит-телескопом лучше, — $[\lambda\lambda] = 0.0506$ —, чем с теми самыми наблюдениями, из которых она сама выведена: $[\lambda\lambda] = 0.0617$.

Но метод сравнения посредством квадратических сумм непригоден именно здесь, так как разности *ПИ — О* и *ЗТВ — О* имеют ход явно систематический. Эти разности показаны в нашей нижеследующей таблице. Систематичности могли возникнуть прежде всего из неодинаковости амплитуд волн А и С в две эпохи, разделенные промежутком времени почти в 20 лет. Могли возникнуть и из тех дальнейших волн колебаний R, которых в эфемериде

$$\varphi - \varphi_0 = A + C$$

не содержится. Однако в обоих этих случаях в ходах разностей *ПИ — ЗТВ* систематичностей не должно быть; они должны были бы выключиться, также и в разностях *ПИ — М* и *ЗТ — М*.

А между тем мы уже в 1914 г. показали и в таблицах и на диаграмме, что систематичности явно присутствуют во всех этих разностях. Там мы отчетливо получили:

амплитуда (*ПИ — М*) > амплитуды (*ЗТВ — М*).

§ 5. **Нарастание амплитуд.** Естественно предположить, что систематичности в разностях *ПИ — О* и *ЗТВ — О* возникли из того, что амплитуды $0''.092$ в А и $0''.210$ в С, принятые проф. А. Я. Орловым в его эфеме-

Таблица 1

Колебания широты $\varphi - \varphi_0$ по различным выводам и разности между выводами

В сотых долях секунды дуги

	ПИ — О	В	ПИ — В		ПИ — О	ЗТВ — О	ПИ — ЗТВ
1890.4	+1	— 1	+3	1908.6	— 7	— 4	— 3
.5	—2	+14	0	.7	—10	— 5	— 5
.6	0	+25	+1	.8	— 8	— 4	— 4
.7	—1	+28	0	.9	— 7	— 4	— 3
.8	—3	+23	—3	1909.0	— 7	— 3	— 4
.9	—3	+10	—3	.1	— 7	— 3	— 4
1891.0	—1	— 6	—2	.2	— 1	+ 1	— 2
.1	—1	—20	—2	.3	0	+ 3	— 3
.2	0	—28	—1	.4	— 3	+ 2	— 5
.3	—1	—27	—3	.5	— 3	+ 2	— 5
.4	—5	—18	—6	.6	+ 3	+ 1	+ 2
.5	—5	— 3	—6	.7	+ 3	+ 2	+ 1
.6	—1	+12	—1	.8	— 1	— 1	0
.7	+3	+24	+3	.9	— 3	— 2	— 1
.8	0	+28	+1	1910.0	+ 2	— 1	— 3
.9	—2	+23	0	.1	+ 6	+ 1	+ 5
1892.0	0	+12	+1	.2	+ 3	+ 1	+ 2
.1	+4	— 3	+5	.3	— 5	— 2	— 3
.2	+9	—16	+9	.4	—13	— 7	— 6
.3	+9	—24	+8	.5	—11	— 5	— 6
.4	+3	—24	+2	.6	+10	+ 6	+ 4
.5	—4	—17	—6	.7	+ 8	+ 6	+ 2
.6	—2	— 5	—5	.8	+ 4	+ 2	+ 2
.7	+2	+ 7	0	.9	+ 3	0	+ 3
.8	0	+13	+3	1911.0	+ 7	— 1	+ 8
.9	—3	+20	—2	.1	+ 7	— 3	+10
1893.0	—7	+17	—4	.2	— 1	— 5	+ 4
.1	—8	+11	—6	.3	— 3	— 5	+ 2
.2	—8	+ 1	—5	.4	— 6	— 7	+ 1
.3	—8	— 7	—6	.5	—11	—11	0
.4	—8	—12	—8				

риду, отличаются от амплитуд колебаний, наблюденных в 1908.6—1911.5 гг. на пассажном инструменте и на зенит-телескопе.

В таком предположении, обозначивши через x и y это расхождение амплитуд соответственно в годовой и в $14^1/_2$-месячной волнах, мы имеем для каждой из разностей *ПИ — О* или *ЗТВ — О*, также и для *ПИ — ЗТВ* уравнения типа

$$x\cos(36^\circ t + 96^\circ) + y\cos(30.25 + 163^\circ) = l + \lambda;$$

всего по 30 уравнений каждого рода.

Значения l вычисляем по статье проф. А. Я. Орлова, эти числа приведены выше в таблице 1.

В результате решения систем уравнений мы получили такие значения разностей в амплитудах волн годовой и $14^1/_2$-месячной:

	A	C	[λλ]	μ
ПИ — О	x = — 0″.047	y = + 0″.074	0.0846	± 0″.055
ЗТВ — О	— 0.013	+ 0.032	0.0446	± 0.040
ПИ — ЗТВ	— 0.025	+ 0.023	0.0403	± 0.034

$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}$ — средняя ошибка одного уравнения.

§ 6. **Уточнение выражения волн для 1890,4—1893,4.** Наблюдения двух эпох 1890,4—1893,4 гг. и 1908,6—1911,5 гг. и мы сравнивали, как только получили кривые колебаний для 1908,6—1911,5 гг. У нас перемена амплитуды в $14^1/_2$-месячной волне получилась значительно большей, чем выведено выше для *ПИ — О* и *ЗТВ — О*. Это обстоятельство побудило нас проверить, насколько близко показанные в статье проф. А. Я. Орлова волны — годовая A и $14^1/_2$-месячная C (см. стр. 3) соответствуют наблюдениям 1890,4 — 1893,4 гг., приведенным в его же таблице с левой стороны.

Называя через x и y поправки амплитуд в этих членах, приводящие к наилучшему представлению наблюдений 1890,4—1893,4 посредством эфемериды, мы получаем по предыдущему же методу 31 уравнений ошибок вида

$$x\cos(36^\circ t + 96^\circ) + y\cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ) = (ПИ_{1890-1893} - О) + \lambda$$

При решении имеем

Нормальные уравнения

$$15.2500\,x + 7.0701\,y = +0.0170$$
$$7.0701\,x + 14.9222\,y = -0.2553$$

и окончательно

$$ПИ_{1890-1893} - O = +0''.011\cos(36^\circ t + 96^\circ) - 0''.022\cos(30^\circ.25\,t + 163^\circ)$$

$[\lambda\lambda] = 0{,}0617 - 0.0002 - 0.0056 = 0.0559$ по формуле

$= 0.0555$ из остаточных ошибок.

Средняя ошибка одного уравнения $= \pm 0''.044$.

Это решение указывает с несомненностью, что наблюдениям 1890.4 — 1893.4 гг. соответствуют только волны

$$A = (0''.092 + 0''.011)\cos(36^\circ t + 96^\circ) = 0''.103\cos(36^\circ t + 96^\circ)$$
$$C = (0''.210 - 0''.022)\cos(30^\circ.25\,t + 163^\circ) = 0''.188\cos(30^\circ.25\,t + 163^\circ).$$

§ 7. **Уточнение нарастания амплитуд.** С нашими только что найденными значениями A и C для волн годовой и $14^1/_2$-месячной мы составляем новую эфемериду B (прежнюю мы назвали O), как для эпохи 1908,6—1911,5 гг., так, ради проверки, и для 1890,4—1893,4 гг. Значения B для 1890,4—1893,4 гг., так же, как и разностей $ПИ_{1890-1893} - B$ и $ПИ_{1908-1911} - O$, $ЗТВ - O$, $ПИ - ЗТВ$, показаны в табл. 1.

Пользуясь этими разностями, составляем, как и выше, соответственные системы уравнений ошибок. Получаем прежде всего выражение для разности

$$ПИ_{1890-1893} - B = +0''.001\cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0''.0003\cos(30^\circ.25 + 163^\circ),$$
$$[\lambda\lambda] = +0.0555,\ \mu = \pm 0''.044.$$

Это еще раз доказывает, что наблюдениям 1890.4—1893.4 гг. соответствуют только наши A и C.

Для 1908.6—1911.5 гг. на основании уже нашей эфемериды точно так, как выше, мы получаем для амплитуды волн A и C такие наращения

	A	C	$[\lambda\lambda]$	μ
$ПИ - B$	$x = -0''.056$	$y = +0''.094$	0.0796	$\pm 0''.053$
$ЗТ - B$	$-0''.024$	$+0''.053$	0.0408	± 0.038

Итак, не подлежит уже сомнению, что в колебаниях $\varphi - \varphi_0$ широты пассажный инструмент дает сильное увеличение амплитуды $14^1/_2$-месячной волны, а для годовой волны дает, напротив, некоторое уменьшение сравнительно с зенит-телескопом.

В таком же соотношении находятся и суммы квадратов остаточных ошибок $[\lambda\lambda]$. Это оттого, что кривая *ПИ* содержит выступов над эфемеридою больше.

§ **8. Две обработки наблюдений 1908.6—1911.5 гг. на пассажном инструменте.** Ряд наблюдений А. С. Васильева на пассажном инструменте намечался на четыре года (1908—1912). Он был прекращен на третьем году распоряжением директора обсерватории О. А. Баклунда (см. Отч. Пулк. обсерв. за 1910—1911 гг., стр. 20—21 и за 1911—1912 гг., стр. 23); намечалось наблюдательный зал инструмента использовать под архив, а инструмент сдать в музей старых инструментов как «инструмент плохо построенный и неудачно поставленный»[1].

Так как полученные в 1908—1911 гг. А. С. Васильевым наблюдения убеждали в противоположном, то для предотвращения намечавшихся действий было необходимо с получением выводов крайне спешить, и потому для составления системы склонений наблюдавшихся звезд был избран путь возможно кратчайший; подробности описаны в работе А. С. Васильева 1914 г., из этой работы и взяты проф. А. Я. Орловым в 1924 г. значения $\varphi - \varphi_0$, это $ПИ_1$.

Когда в результате работы 1914 г. выяснилось, что разность *ПИ*—*ЗТВ* не только не нуль, как естественно было ожидать, но что она даже систематична и отчетливо выявляет закономерности в пользу пассажного инструмента, то сделалось ясным, что примененный первоначально метод составления системы склонений мог отразиться на этой разности, ее уменьшая. К 1917 г. мы успели вычислить систему склонений, независимую и от зенит-телескопа и от всяких посторонних данных, именно по разностям зенитных расстояний, наблюденных только на пассажном инструменте в течение промежутка времени не большего суток. Подробности этой обработки и заключительные значения $\varphi - \varphi_0$ опубликованы в 1917 г.[2] Вычислительная помощь предоставлена была от Пулковской обсерватории распоряжением директора А. А. Белопольского.

[1] А. С. Васильев. 70 лет истории Пулковского пассажного инструмента в 1-м вертикале. Изв. Русск. астр. общ., 1912.

[2] А. С. Васильев. Пассажный инструмент в 1-м вертикале и зенит-телескоп в результатах наблюдений широты места. Изв. Росс. Акад. Наук, 1917, №№ 13 и 14.

§ 9. **Окончательные значения разностей амплитуд.** Вычислим разности амплитуд x и y в годовой и $14^1/_2$-месячной волнах колебаний широты и для окончательных значений $\varphi - \varphi_0$, опубликованных нами в 1917 г., это $ПИ_2$. Метод вычисления и основания сохраняем те же, как выше. Новые значения $\varphi - \varphi_0$ и соответственные разности показаны в таблице 2. В целях дополнения картины явления, мы составляем подобные же уравнения и для разностей $ПИ_2 - ЗТВ$, $ПИ_2 - М$, $ЗТ - М$. Значения $М$ даны в работе А. С. Васильева 1914 г.,[1] количество уравнений n = 30.

Для наращения амплитуд в результате решения имеем:

	A	C	[λλ]	Средняя ошибка одного уравнения
$ПИ_2 - ПИ_1$	$x = -0''.003$	$y = +0''.022$	0.0157	$\pm 0''.024$
$ПИ_2 - В$	−0.052	+0.106	0.0993	±0.060
$ПИ_2 - ЗТВ$	−0.029	+0.054	0.0367	±0.034
$ПИ_2 - М$	+0.003	+0.057	0.0937	±0.058
$ЗТВ - М$	+0.036	+0.001	0.0316	±0.034

Только разности

$$ПИ_2 - В = -0''.052 \cos(36° t + 96°) + 0''.106 \cos(30°.25 t + 163°)$$

и

$$ЗТВ - В = -0''.024 \cos(36° t + 96°) + 0''.053 \cos(30°.25 t + 163°)$$

имеют свое простое и естественное объяснение. Они возникли из неравных амплитуд колебаний широты в две разных эпохи, произошло изменение амплитуд во времени. А какова причина остальных разностей?

§ 10. **Случайная ошибка кривых колебаний широты.** В последнем решении уравнений наиболее интересным представляется очень малый размер суммы [λλ] = 0.0157 квадратов остаточных ошибок и отсюда малая средняя ошибка одного уравнения $\mu = \pm 0''.024$ для разности $ПИ_2 - ПИ_1$. Кривые $ПИ_1$ и $ПИ_2$ для $\varphi - \varphi_0$ были построены нами совершенно независимо одна от другой из одних и тех же зенитных расстояний, но при различной их группировке и на системах склонений, различными методами выведенных (см. выше § 8). Поэтому с достоверностью можно утверждать, что из разности выключились все волны колебаний широты, все внешние воз-

[1] Изв. Ак. Наук, 1916, стр. 1605.

Таблица 2

Колебания широты $\varphi - \varphi_0$ по различным выводам и разности между выводами

В сотых долях секунды дуги

	B	*ПИ*$_2$	*ПИ*$_1$ — *B*	*ПИ*$_2$ — *B*	*ПИ*$_2$ — *ПИ*$_1$	*ПИ*$_2$ — *ЗТ*	*ПИ*$_2$ — *M*	*ЗТ* — *B*
1908.6	+23	+17	— 6	— 6	0	—3	— 2	— 3
.7	+20	+ 8	—10	—12	—2	—7	— 6	— 5
.8	+ 9	— 3	— 9	—12	—3	—7	— 7	— 5
.9	— 4	—14	— 9	—10	—1	—4	— 7	— 6
1909.0	—18	—28	— 8	—10	—2	—6	— 9	— 4
.1	—26	—38	— 8	—12	—4	—8	—14	— 4
.2	—26	—31	— 2	— 5	—3	—5	— 8	0
.3	—18	—16	0	+ 2	+2	—1	— 2	+ 3
.4	— 5	0	— 2	+ 5	+7	+2	+ 3	+ 3
.5	+11	+15	— 2	+ 4	+6	+1	+ 3	+ 3
.6	+24	+30	+ 4	+ 6	+2	+4	+ 4	+ 2
.7	+29	+34	+ 4	+ 5	+1	+2	+ 2	+ 3
8	+25	+25	0	0	0	0	0	0
.9	+14	+12	— 3	— 2	+1	0	— 1	— 2
1910.0	— 2	0	+ 2	+ 2	0	+3	0	— 1
.1	—17	—13	+ 5	+ 4	—1	+4	0	0
.2	—27	—26	+ 2	+ 1	—1	+1	0	0
.3	—28	—37	— 6	— 9	—3	—6	— 9	— 3
.4	—21	—38	—14	—17	—3	—9	—16	— 8
.5	— 7	—16	—12	— 9	—3	—3	— 8	— 6
.6	+ 8	+18	+10	+10	0	+4	+ 6	+ 6
.7	+21	+31	+ 8	+10	+2	+4	+ 6	+ 6
.8	+26	+34	+ 5	+ 8	+3	+5	+ 3	+ 3
.9	+24	+29	+ 5	+ 5	0	+3	0	+ 2
1911.0	+14	+22	+ 9	+ 8	—1	+7	+ 1	+ 1
.1	+ 1	+ 6	+ 8	+ 5	—3	+7	— 4	— 2
.2	—12	—15	0	— 3	—3	+1	—12	— 4
.3	—20	—28	— 4	— 8	—4	—2	—14	— 5
.4	—22	—32	— 8	—10	—2	—1	— 9	— 9
.5	—18	—29	—13	—11	—2	+2	— 5	—13

действия и сохранились только искажения — систематичности, вошедшие в $ПИ_1$ от зенит-телескопа через примененную систему склонений.[1] После же выключения и этой систематичности, которая представляется формулой

$$ПИ_2 - ПИ_1 = -0''.003\cos(36°\,t + 96°) + 0''.022\cos(36°.25 + 163°)$$

мы в остатках λ должны иметь только ошибки случайные.

Отсюда получается возможность утверждать, что средняя случайная ошибка каждой из наших функций для $\varphi - \varphi_0$, опубликованных и в 1914 г., $ПИ_1$, и в 1917 г., $ПИ_2$, через десятую долю года не больше, чем

$$\mu = \frac{\pm 0''.024}{\sqrt{2}} = \pm 0''.017.$$

Отсюда заключаем, что много бо́льшие размером суммы квадратов $[\lambda\lambda]$ и средние ошибки в других из представленных в этом исследовании разностей обязаны своим размером не случайным ошибкам, а реальным выступам, созданным воздействиями внешними, — воздействиями, выявленными в функциях $ПИ$ и $ЗТ$ двумя инструментами различно.

§ 11. Причина лучшего согласия с эфемеридою наблюдений зенит-телескопа, чем пассажного инструмента. Полученные в § 9 сопоставления с совершенной ясностью объясняют, почему «наблюдения на зенит-телескопе лучше согласуются с эфемеридою», чем наблюдения на пассажном инструменте в первом вертикале. Потому, во-первых, что на пассажном инструменте $14^1/_2$-месячная волна колебаний широты в 1908.6—1911.5 гг. получилась из наблюдений с бо́льшею амплитудою, чем на зенит-телескопе. Для разности $ПИ_2 - ЗТВ$ это увеличение достигло $+0''.054$, а для разности $ПИ_2 - В$ даже $+0''.106$, тогда как в $ЗТВ - В$ оно по § 7 только $+0''.053$. Потому, во-вторых, что и в годовой волне колебаний широты значения амплитуды оказываются несовпадающими: для разности $ПИ_2 - ЗТ$ имеем, обратно $14^1/_2$-месячной волне, уменьшение на $0''.029$; для $ПИ_2 - В$ имеем $0''.052$ и для $ЗТ - В$ оказывается $-0''.024$. И еще потому, что пассажный инструмент отметил волны дальнейшие, отличающиеся от годовой и $14^1/_2$-месячной, отчетливее, чем зенит-телескоп, т. е. в виде выступов бо́льших. Эти

[1] От зенит-телескопа в $ПИ_1$ вошла кривая Л. И. Семенова, в которой А. С. Васильев потом выявил 14-дневную предвзятость. Подробности в работе 1914 г. (Изв. Акад. Наук, 1916), стр. 1600. В этом исследовании $ЗТВ$ означает кривую, выработанную А. С. Васильевым.

выступы заключаются в остатках λ, и потому мы имеем увеличенные суммы квадратов

$$[\lambda\lambda] = 0.0993 \text{ в разности } \Pi\Pi_2 - B \text{ при } n = 30$$
$$= 0.0937 \text{ в разности } \Pi\Pi_2 - M \text{ при } n = 30$$

и уменьшенные

$$[\lambda\lambda] = 0.0367 \text{ в разности } \Pi\Pi_2 - ЗТВ \text{ при } n = 30$$
$$= 0.0316 \text{ в разности } ЗТВ - M \text{ при } n = 30$$

§ 12. **Разности удвоенных амплитуд в особые дни.** Так выступает явление колебаний широты в итоговых кривых, в которых опорные точки представляют среднее из 20—30—60 наблюдений.

Но собранные и разработанные нами материалы дают возможность проследить явление по значениям широты в отдельные дни и даже в отдельных наблюдениях. Для удвоенной амплитуды (максимум—минимум $= 2b$) колебание в разности $\Pi\Pi_2 - ЗТВ$ получилось за время 1908,6—1911,5:

$2b = +0''.084$ по кривым графически выровненным,
$= +0.145$ по подлинным нормальным точкам,
$= +0.440$ по средним значениям в соответственные дни,
$= +0.758$ по отдельным соответственным наблюдениям.

§ 13. **Звезды строго зенитные и звездные пары в зенит-телескопе.** Так поразительно различие в показаниях двух инструментов при наблюдениях одного и того же явления — колебаний $\varphi - \varphi_0$ широты в одном и том же месте в одно и то же время, когда при наблюдениях применяются обычные для этих инструментов методы, т. е. на зенит-телескопе наблюдаются группы звездных пар. Когда же на зенит-телескопе наблюдаются звезды возле самого зенита, когда звезда на зенит-телескопе служит сама себе парою, — тогда такие наблюдения не дают, повидимому, никаких отчетливых различий с данными пассажного инструмента.

В 1905,0—1906,7 гг. и в 1908,6—1911,5 гг. наблюдалась одновременно на двух инструментах одна и та же зенитная звезда δ Кассиопеи. Собравши полученные на каждом инструменте ее зенитные расстояния в нормальные точки по 4 наблюдения в каждую, мы возле эпох максимума

и минимума широты получили по нормальным точкам такие значения широты

В 1908,6—1911,5 г.			В 1905,0—1906,7 г.	
ПИ	*ЗТ*		*ПИ*	*ЗТ*
59°46′			59°46′	
мáкс. 18″.26	18″.28			
мин. 17.64	17.56	мин.	17″.62	17″.63
макс. 18.47	18.47	макс.	18.11	18.14
мин. 17.42	17.56	мин.	17.72	17.79
макс. 18.54	18.49			

Отсюда имеем значения максимум — минимум $= 2b$, удвоенной амплитуды, и значения разности удвоенных амплитуд:

ПИ	*ЗТ*	*ПИ* — *ЗТ*	
$2b =$ 0″.62	0″.67	— 0″.05	
0.83	0.91	— 0.08	в 1908,6—1911,5 гг.
1.05	0.91	+ 0.14	
1.12	0.93	+ 0.19	

Среднее: $+ 0.050 = 2b$.

$2b =$ 0″.49	0″.51	— 0″.02	в 1905.0—1906.7 гг.
0.39	0.35	+ 0.04	

Среднее: $= + 0.010 = 2b$.

Сравнение этого вывода с данными § 11 — там, например, $+ 0''.440$ — как будто бы свидетельствует об отсутствии различий у зенит-телескопа с пассажным инструментом в первом вертикале, когда на зенит-телескопе наблюдаются звезды строго зенитные, служащие сами себе парою.

§ 14. **Различные обработки того же материала на зенит-телескопе.** Особенно повезло наблюдениям на зенит-телескопе 1908,6—1911,5 гг., совпадающим по времени с наблюдениями А. С. Васильева на пассажном инструменте в первом вертикале. Кроме вышеупомянутых выработок колебаний $\varphi - \varphi_0$

широты Л. И. Семенова в 1911 г. — кривая *ЗТС* и А. С. Васильева в 1914 г. — кривая *ЗТВ* имеются еще значения $\varphi - \varphi_0$, сообщенные в печати и Б. В. Нумеровым и Б. А. Земцовым в 1918 г. К тому, что сообщено о выводе Л. И. Семенова в работе А. С. Васильева 1914 г.,[1] мы прибавить ничего не можем, но разности между остальными выводами из одного и того же материала очень интересны.

Значения разностей, основание наших этих вычислений, мы сообщаем в табл. 3. Обрабатывая их посредством уравнений и способа наименьших квадратов точно так, как выше в §§ 5, 6, 9 мы получаем

	A	C	[λλ]	μ
ЗТВ — Нумер.	+ 0″.000	— 0″.009	0.0101	± 0″.019
Нум. — Земц.	+ 0.061	+ 0.002	0.0267	± 0.031
ЗТВ — Земц.	+ 0.060	— 0.005	0.0269	± 0.031
$ПИ_2$ — Нумер.	— 0.029	+ 0.045	0.0505	+ 0.042
$ПИ_2$ — Земц.	+ 0.037	+ 0.040	0.0896	± 0.057

Из этого решения уравнений мы видим, что с значениями $\varphi - \varphi_0$ А. С. Васильева для зенит-телескопа, опубликованными в 1914 г., полностью тождественны и в годовой волне и в $14^1/_2$-месячной значения Б. В. Нумерова, опубликованные в 1918 г. Значения Б. А. Земцова, опубликованные также в 1918 г., при сравнении с значениями А. С. Васильева и, следовательно, Б. В. Нумерова, указывают на очень сильное уменьшение амплитуды в годовой волне и совпадение в $14^1/_2$-месячной:

$$\text{Нум.} - \text{Земц.} = + 0''.061 \cos(36° t + 96°) + 0''.002 \cos(30°.25\, t + 163°).$$

Поразительно мала сумма остаточных ошибок в разности *ЗТВ* — Нумеров: $[\lambda\lambda] = 0.0101$. Она свидетельствует о тождестве всех выступов в кривых $\varphi - \varphi_0$ *ЗТ* Васильева и *ЗТ* Нумерова. Бо́льшие, чем у других разностей значения сумм квадратов $[\lambda\lambda]$ в разностях $ПИ_2$ — Земцов — $[\lambda\lambda] = 0.0896$ и $ПИ_2$ — Нумер. — $[\lambda\lambda] = 0.505$ следует объяснять, как и прежде, наличием бо́льших выступов в $ПИ_2$. Разность Нумеров — Земцов дает только $[\lambda\lambda] = 0.0267$, — немного, но все-таки больше, чем разность Васильев — Нумеров $[\lambda\lambda] = 0.0101$.

[1] См. там стр. 4 и 9 (Изв. Акад. Наук, 1916 г., стр. 1592, 1603).

Таблица 3

Разности между выводами $\varphi - \varphi_0$ из тех же самых наблюдений на зенит-телескопе

В сотых долях секунды дуги

	ЗТВ — Нум.	Нум. — Земц.	*ЗТВ* — Земц	*ПИ*$_2$ — Нум.	*ПИ*$_2$ — Земц.
1908.6	—2	+ 8	+ 6	— 5	+ 3
.7	—1	+10	+ 9	— 8	+ 2
.8	—1	+ 7	+ 6	— 8	— 1
.9	0	0	0	— 4	— 4
1909.0	0	— 3	— 3	— 6	— 9
.1	—2	— 2	— 4	—10	—12
.2	—1	0	— 1	— 6	— 6
.3	0	0	0	— 1	— 1
.4	0	— 3	— 3	+ 2	— 1
.5	+1	— 2	— 1	+ 2	0
.6	—1	+ 5	+ 4	+ 3	+ 8
.7	—1	+ 9	+ 8	+ 1	+10
.8	—2	+ 5	+ 3	— 2	+ 3
.9	—1	— 1	— 2	— 1	— 2
1910.0	—3	— 3	— 6	0	— 3
.1	—1	— 6	— 7	+ 3	— 3
.2	+1	— 5	— 4	+ 2	— 3
.3	+3	— 4	— 1	— 3	— 7
.4	+1	— 5	— 4	— 8	—13
.5	0	— 1	— 1	— 3	— 4
.6	+5	+ 6	+11	+ 9	+15
.7	—2	+13	+11	+ 2	+15
.8	—5	+ 7	+ 2	0	+ 7
.9	—1	0	— 1	+ 2	+ 2
1911.0	+1	— 3	— 2	+ 8	+ 5
.1	—2	— 4	— 6	+ 5	+ 1
.2	—2	— 6	— 8	— 1	— 7
.3	—1	— 4	— 5	— 3	— 7
.4	—1	— 2	— 1	0	— 2
.5	—1	— 3	+ 2	+ 1	+ 4

§ 15. **Умаление годовой волны в обработке наблюдений зенит-телескопа Земцовым.** На основании выводов настоящего исследования (§ 5, 6, 9, 14) мы имеем для колебаний широты такие выражения $\varphi - \varphi_0$:

в 1890,4—1893,4 гг.:

$0''.103 \cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0''.188 \cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ) + R$ Пассажн. инстр.

в 1908,6 — 1911,5 гг.:

$0''.043 \cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0''.242 \cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ) + R'$ Межд. Сл. Широт

$0.051 \cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0.294 \cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ) + R'$ Пассажн. инстр.

$0.079 \cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0.241 \cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ) + R'$ Зенит-тел. Васильев

$0.079 \cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0.250 \cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ) + R'$ Зенит-тел. Нумеров

$0.018 \cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0.248 \cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ) + R'$ Зенит-тел. Земцов.

Рассматривая теперь наблюдения только на зенит-телескопе, видим, что амплитуда $14^1/_2$-месячной волны в выводах и Васильева, и Нумерова, и Земцова получилась одинаковой, но амплитуда волны годовой, согласная у Нумерова с Васильевым, у Земцова получилась очень сильно уменьшенной, она получилась сведенной почти до нуля.

Если амплитуда $14^1/_2$-месячной волны у Нумерова и у Земцова одинаковы, то, значит, все разности «Нумеров—Земцов» возникли только из неравенства амплитуд годовой волны. Весь опубликованный этими авторами материал простирается не на 3 года, как использовано выше, а на $7^1/_2$ лет. Изучая этот весь $7^1/_2$-летний материал (см. табл. 4), видим годовой ход ясно выраженным, и только в 1913 г. заметно некоторое возмущение.

Для каждого года возможно было бы получить формулы, подобные предыдущим, близко совпадали бы и фазы годовой волны; для всего же $7^1/_2$-летнего промежутка времени мы из 75 уравнений подобно предыдущему имеем:

в 1908,3—1915,7 гг.

$$\text{Нумеров} - \text{Земцов} = +0''.044 \cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0''.011 \cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ)$$

при этом средняя ошибка одного уравнения

$$\mu = \pm 0''.034, \text{ а } [\lambda\lambda] = 0.0818 \text{ при } n = 75,$$

что при $n = 30$ дало бы $[\lambda\lambda] = 0.0314$.

Таблица 4

Годовой ход в разности «Нумеров—Земцов» двух обработок одних и тех же наблюдений на зенит-телескопе

В сотых долях секунды дуги (0″.01)

	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915
0.0	—	—3	— 3	—3	— 3	+4	—2	—2
.1	—	—2	— 6	—4	0	+3	—2	—3
.2	—	0	— 5	—6	+ 2	+2	—2	—2
.3	— 2	0	— 4	—4	+ 1	—1	—2	—1
.4	— 3	—3	— 5	—2	— 2	—3	—1	—1
.5	+ 2	—2	— 1	—3	+ 3	—5	+2	0
.6	+ 8	+5	+ 6	+8	+ 1	—3	+4	+3
.7	+10	+9	+13	+5	+10	+1	+9	+8
.8	+ 7	+5	+ 7	—1	+ 7	+5	+5	—
.9	0	—1	0	—4	+ 6	+3	+1	—

Все это полностью совпадает с выводом для 1908,6—1911,5 гг. в § 14. В обработке Б. А. Земцова колебаний $\varphi - \varphi_0$ широты умаление амплитуды годовой волны сомнению таким образом не подлежит.

§ **15. Заключение.** Новым в настоящем исследовании является представление гармоническими рядами в виде волн годовой и $14^1/_2$-месячной не функции $\varphi - \varphi_0$ колебаний широты, а разностей, получающихся в результате сравнения ея значений в разные эпохи, или в результате измерений ея разными инструментами и методами, или в результате обработки одних и тех же измерений разными авторами. Полугодовая волна и волны дальнейшие, хотя в функции $\varphi - \varphi_0$ несомненно и присутствуют, нами здесь не рассматривались потому, что обилием чисел исследование только затемнилось бы. Такой метод представления и, так сказать, измерения разностей создает в больших группах чисел объединение и легкую обозримость.

Новым является и указанное нами в § 13 различие между результатами наблюдений колебаний широты на зенит-телескопе по звездам строго зенитным и по звездным парам. К сожалению звезд строго зенитных наблюдать достаточно много на зенит-телескопе невозможно вследствие их слабой яркости; материал для этого всегда будет ограниченным. Поэтому нам, в сущности, остается только сравнивать наблюдения не зенитные звездных пар на зенит-телескопе с зенитными наблюдениями в первом вертикале. Возможно, что вычисление размаха 2b (см. § 13) колебаний по всем имеющимся с 1904 г. наблюдениям δ Кассиопеи и по наблюдениям звездных пар привело бы к выводам тождественным с нашим. Мы не располагаем ни временем ни вычислительными силами для того, чтобы проработать по такому пути весь уже имеющийся материал.

Новым является и установленное нами громадное умаление амплитуды годовой волны в обработке наблюдений зенит-телескопа Б. А. Земцовым по сравнению с выводами из тех же наблюдений Васильева и Нумерова.

Об остальных разностях, разработанных в этом исследовании, и о причине их возникновения было сообщено в 1914 г. в статье А. С. Васильева. Представляя те самые разности в виде гармонических волн, мы в настоящем исследовании дали им сжатое и образное выражение и тем создали в дальнейших исследованиях возможность углублений.

Если различные измерения одной и той же функции в одно и то же время дают разности в роде установленных нами

$$ПИ_2 - ЗТВ = -0''.029\cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0''.054\cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ),$$

то мы обязаны заключить, что одно измерение или оба содержат искажение. Если одни и те же измерения в двух обработках дают разное, вроде установленной нами разности

$$\text{Нумеров} - \text{Земцов} = +0''.061\cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0''.054\cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ),$$

то мы заключаем, что какая-либо обработка или обе содержат искажение. Отсюда возникает необходимость исследований, что̀ именно искажено и какой причиной.

Мы установили здесь еще разность

$$ПИ_2 - ПИ_1 = -0''.003\cos(36^\circ t + 96^\circ) + 0''.022\cos(30^\circ.25\, t + 163^\circ)$$

и здесь же указали причину ея возникновения. Эта разность является прекрасной иллюстрацией последствий, возникающих из исправления

зенитных расстояний за колебания широты по приближенным кривым.

Причины разностей *ПИ — ЗТ*, *ПИ — М*, *ЗТ — М* указаны в 1914 г. А. С. Васильевым, но бегло и, возможно, что неполно и неясно. Разность «Нумеров — Земцов» является, как сказано, новостью, выявлена здесь впервые и неожиданно; причина ее возникновения иная, чем тех первых разностей.

В настоящем исследовании, расширивши против 1914 г. количество изученных разностей и представивши их гармоническими формулами, мы всё подготовили к выяснению их причины и этим здесь ограничиваемся для того, чтобы тем сильнее оттенить важность самих по себе установленных здесь фактов.

В следующем исследовании мы увидим, что причины разностей при наблюдениях колебаний широты устанавливают между двумя инструментами — пассажным в первом вертикале и зенит-телескопом — глубокое различие.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

О ПРОБЛЕМАТИЧЕСКИХ ОТПЕЧАТКАХ, ИЗВЕСТНЫХ ПОД НАЗВАНИЕМ *PALEODICTYON* MENEGHINI[1]

А. П. КАРПИНСКОГО

Акад. В. А. Обручев передал мне для исследования образец сланца с южного берега Крыма с рельефным отпечатком, состоящим из сети шестиугольных ячеек (табл. I, фиг. 1). Сланцу приписывается верхне-триасовый возраст. Подобные отпечатки как в Крыму, так и по западному побережью Кавказа, наблюдались также нашими геологами Каракашем, Борисяком, Бодылевским (табл. II, фиг. 2), Пчелинцевым, а в последнее время они были найдены горн. инж. Кандыкиным и за восточным склоном Урала, в бассейне р. Пышмы, среди горизонтальных отложений меловой (третичной?) системы (табл. II, фиг. 3, 4 и 5).

Такие характерные образования были, без сомнения, замечаемы с отдаленных времен, но ученые исследователи ознакомились с ними лишь в начале прошедшего столетия. Так, известный американский ученый, проф. Hitchcock, при его исследованиях в штате Коннектикут в 1807 г., наблюдая рассматриваемые отпечатки, объяснил образование их в мелких водоемах с илистым дном движением головастиков, очень многочисленных в изучавшихся этим ученым местностях. В своем сочинении Ichnology of New England, изданном в Бостоне в 1858 г., Hitchcock дает проблематическим отпечаткам название *Batrachoides*. Но еще ранее, в 1851 г., итальянский геолог Meneghini,[1] признавший их за отпечатки водорослей, придал им название *Paleodictyon*.[2]

[1] Appendice alla Memoria del Murchison: Sulla struttura geologica delle Alpi, degli Appennini e dei Carpazi.

[2] Я оставляю транскрипцию этого названия, принятую его автором, чему следовали и другие итальянские ученые, хотя правильнее было бы писать *Palaeodictyon*.

В Италии подобные отпечатки были наблюдаемы в отложениях меловых, эоценовых и миоценовых.

Авторитетный германский палеонтолог К. Mayer признавал их за продукт усыхания грязи.[1] Вообще же мнения ученых были чрезвычайно различны: то их рассматривали за отпечатки губок или кораллов, то даже за отпечатки сот пчел или ос, как это предполагал Scarabelli в 1880 г. В 1886 г. F. Sacco[2] объясняет образование *Paleodictyon* движением зыби на мелких прибрежных частях бассейнов, а De Stefani предполагает в них отпечатки губок, подобных *Euplectella*.[3] В следующем году Sacco снова возвращается к неорганическому происхождению *Paleodictyon* вследствие ритмического движения воды над мелководною грязью и песком.[4]

Венский ученый Th. Fuchs, так удачно разъяснивший происхождение многих загадочных форм и отпечатков, относительно *Paleodictyon* пришел в 1895 г. к выводам мало правдоподобным.[5]

В том же 1895 г. проф. Trabucco[6] указывает на нахождение *Paleodictyon* в миоценовых отложениях Тосканы и, не входя в рассмотрение вопроса о природе этой формы, дает два изображения *Paleodictyon rubiconis* Scarab., указывая на вероятное тожество его с видами *P. giganteus* и *P. rectiforme* других авторов.

Можно заметить, что и у нас были ученые, принимавшие рассматриваемые проблематические образования за определенные организмы. Так, Эйхвальд описывает и изображает в Letaea rossica II, T. VII, Fig. 12, губку *Cephalites maximus*, приводимую им и в Géognosie de la Russie под названием *Scyphia maxima*.[7]

Большой интерес представляет опубликованное в 1904 г. исследование д-ра Capeder «Sulla natura delle problematiche impronte di Paleodictyon».[8] Он объясняет возникновение проблематических отпечатков *Paleodictyon* действием падающих капель воды (дождя) на грунт, состоящий из грязи или песка, что и поясняет многочисленными рисунками искусственно им по-

[1] Ch. Mayer. Sur la carte géologique de la Ligurie centrale. Bull. Soc. Géol. Fr., sér. 8, 1877.

[2] Atti R. Acc. Scienze. Torino, XXXI.

[3] Boll. Soc. Geol. Italiana. VI, 1887.

[4] Atti Soc. R. Sci. Naturali, XXXI, 1888.

[5] Studien über Fucoid. u. Hierogl. Denkschriften Ak. Wiss. Wien, LXII, 1895.

[6] G. Trabucco. Il Langhiano della provincia di Firenze. Boll. Soc. Geol. Italiana, XIV, 1895, p. 173, 175, f. 6 a-b, 176.

[7] Roemer указывает на *Cephalites* в Palaeontographica, XIII, p. I, Taf. IV, Fig. 5.

[8] Boll. Soc. Geol. Italiana, XXIII, 1904, p. 435, tav. XIII. Capeder приводит и довольно тщательно собранную литературу.

лученных отпечатков. На приведенных в тексте фиг. 1, 2 и 3 представлены такие отпечатки.

Вполне достоверно, однако, что помимо указанных причин существуют и действительные отпечатки твердых покровов животных, особенно чешуйчатых покровов позвоночных, отличающихся иногда правильностью шестиугольного очертания чешуек, исчезнувшие кожные промежутки между которыми заменены породой. Укажу сперва на отпечатки больших неправильного очертания чешуек кожного покрова динозавра *Scolosaurus Cuttleri*

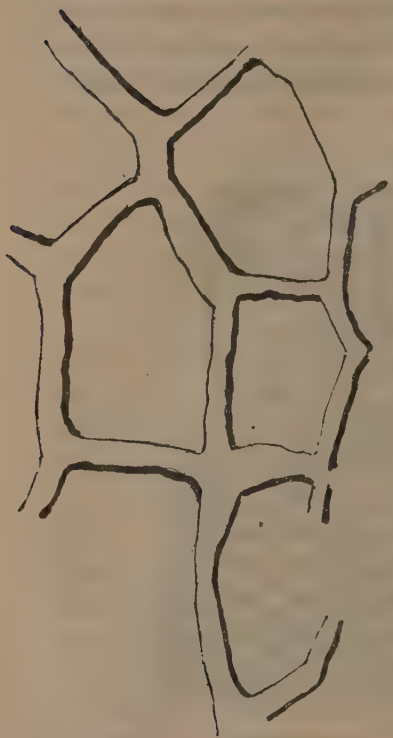
Фиг. 1. Отпечатки водяных капель на плоской песчаной поверхности (Capeder, табл. XIII, фиг. 2).
Фиг. 2. Искусственное воспроизведение *Paleodictyon regulare* (Capeder, табл. XIII, фиг. 4).
Фиг. 3. *Paleodictyon miocenicum*, искусственный (Capeder, фиг. 8).

Nopcsa (фиг. 4), отпечатки в наглядном, отчетливом виде, появляющиеся после выпадания отдельных чешуй. Ископаемое описано венгерским ученым Нопча (Nopcsa) в его работе Paleontological Notes on Reptiles.[1] Но можно привести примеры и правильных шестиугольных чешуй как большого размера, так и мелких, образующих покров тех или других частей животного.

[1] Geologica Hungarica, Ser. Palaeontol. I, fasc. I, 1928, p. 54, pl. VI, fig. 4; pl. VII, fig. 2.

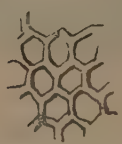
К первым, например, принадлежит *Psephoderma anglicum* K. v. Mayer (фиг. 5),[1] ко вторым *Actinodon* sp. (фиг. 6).[2]

В работе Fraas'a «Die schwabischen Triassaurien»[3] также приводятся формы с шестиугольными очертаниями чешуй (Psephosaurus suevicus, alpinum).



Фиг. 4. Очертания отпечатков кожных чешуй *Scolosaurus Cuttleri* Nopcsa; упрощенный рисунок части фиг. 2, табл. VII. Нат. вел.

Фиг. 5. Очертание чешуй *Psephoderma anglicum* Meyer. Нат. вел.



Фиг. 6. *Actinodon* sp. *Broili* (часть фототипии 2).

Проф. Huene в своем весьма обстоятельном обзоре триасовых рептилий[4] также приводит указания на подобные чешуйчатые покровы, как, напр., спинной панцырь *Placoheilys* Jaekel и др.

[1] Palaeontographica, XV, 1861, S. 261, Taf. 40.

[2] F. Broili. Über d. Hautbedeck. d. Archaegosauridae u. Actinodontidae. Zs. D. Geol. Ges. B. 79, 1927, S. 375, Taf. VII, Fig. 2; также Döderlein, Abh. d. Senkenb. Naturforsch. Ges. B. 26.

[3] Stuttgart, 1896, p. 13, 14.

[4] Geolog. u. Palaeontol. Abhandlungen, III, p. 33.

Приведенные выше известные до сих пор данные свидетельствуют, что рассматриваемые проблематические образования могут возникать как отпечатки поверхностных частей или покровов организмов, а также и путем, не имеющим никакого отношения к организмам, и в некоторых условиях могут быть воспроизведены искусственно. К типу неорганическому должны относиться образования, занимающие площади в несколько кв. метров. Здесь же можно упомянуть о строении северной тундры в виде шестиугольной сети, среди более ярко выраженной квадратной линейно-расположенной сети, наблюдавшейся у западного берега Таймырского озера минувшим летом руководителем научной части экспедиции на дирижабле «Цеппелин» Р. Л. Самойловичем. Размеры ячеек этой почвы, судя по высоте полета, должны были достигать $1^1/_2$—2 м. Образование их, вероятно, связано с характерным развитием болотной (тундровой) растительности.

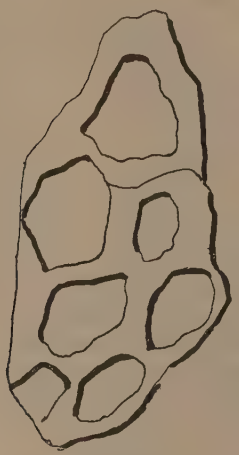
Фиг. 7. Упрощенный рисунок части фотографического снимка полигональной почвы Шпицбергена. O. Nordenskjöld. Polar Nature. Amer. Geogr. S. The Geography of Polar Regions. Sp. Publ., № 8, p. 55, fig. 13. Ок. $^1/_7$ нат. вел.

Замечательна полигональная (шестиугольная) почва, наблюдавшаяся Норденшельдом и др. исследователями на Шпицбергене в других полярных странах (фиг. 7). Образование этой почвы еще недостаточно выяснено.[1]

При наблюдении отпечатков, к которым применялось название *Paleodictyon*, можно заметить, что внешняя сторона пограничных ячеек представляет дугу, и что, следовательно, шестиугольное очертание ячеек

[1] Образование линейно-квадратной сети объясняется другими причинами. Я ограничиваюсь приведенными примерами отчетливой шестиугольной структуры и не останавливаюсь на примерах, связанных с накоплением крупного обломочного материала, наблюдаемым в приполярных и полярных областях, на так назыв. каменных многоугольниках (stone-polygon), не имеющих отношения к рассматриваемому мною вопросу. Я обязан Р. Ф. Геккеру указанием на статью И. Н. Гладцина (Изв. Г. Р. Геогр. О-ва, LX, 1928, вып. 2), в которой, кроме исследований самого автора, приводятся работы и ряда иностранных ученых. Интересны, конечно, и очень известные и давно разъясненные шестиугольные отдельности изверженных пород, а также полигональные отдельности грязевых площадей степей, такыров и даже соляных покровов самосадных озер, как, напр., недавно описанные Б. А. Федоровым в Каракумах (Природа, 1931, № 3, 112).

является результатом взаимного соприкосновения возникающих круглых ячеек (фиг. 8). Это можно видеть и на образце (табл. I, фиг. 2). На образце, доставленном Кандыкиным (табл. II, фиг. 5) наблюдаются круглые и угловатые ячейки, возникновение которых, быть может, будет объяснено соприкосновением со слоем оолитовой руды, что легко может быть установлено лишь непосредственным наблюдением. На нахождение такой руды, насколько помню, инж. Кандыкин указывал. Возможно также, что ячеистая форма отпечатков обусловливается и слоем исчезнувших мелких раковинок пелеципод, изредка сохранившихся на пластах наслоения породы (табл. II, фиг. 5, 5-a, 5-b).



Фиг. 8. Крым. Нат. вел.

О неорганическом происхождении рассматриваемых сетчатых образований свидетельствует и нахождение тожественных форм в отложениях различного геологического возраста. На возможность образования сетчатых отпечатков почвы, по крайней мере на небольшом ограниченном участке поверхности тонкопесчаной почвы, указывают и отпечатки накрапывавшего дождя, иногда под ветвями лиственных и хвойных растений.[1]

Наконец, на вероятность происхождения многих сетчатых шестиугольных отпечатков указывает и возможность вышеупомянутого искусственного их воспроизведения.

Большинство доставленных образцов представляет тонкий слой сланца с ячеистой поверхностью, непосредственно покрывающей сплошной, крепкий, мелкозернистый песчаник. На некоторых образцах, внутри шестиугольных петель, замечаются одно, два или более возвышения — бугорка, указывающих вероятно на то отверстие, через которое из песка пробивался газ в землистый тонкий слой сланца. Иногда около таких бугорков развиваются новые вторичные петли. Наблюдаются также внутри петель и кратерообразные возвышения (табл. I, фиг. 1 и 1a, увеличенная часть образца фиг. 1).

[1] Когда на каменный пол большого балкона моей квартиры из нависшей, медленно двигавшейся тучи стал накрапывать дождь крупными каплями, они оставили на полу довольно равномерно расположенные темные мокрые следы, которые не были смыты начавшимся дождем уже отодвинувшейся тучи. Я не мог зафиксировать это фотографическим снимком, который один мог бы явиться подлинным документом, независимо от зрительных впечатлений наблюдателя. Я объяснил себе это явление соединением, стяжением мельчайших водяных частиц тучи в капли того размера, при котором они уже не могли удержаться в самой туче.

ОБЪЯСНЕНИЯ К ТАБЛИЦАМ I и II

Фиг. 1. Образец верхне-триасовского сланца с Ю. берега Крыма, доставленный ак. В. А. Обручевым. Нат. вел.

Фиг. 1а. Часть того же образца, увел. ок. 3 раз.

Буквой α на обеих фигурах отмечен один и тот же пункт.

Фиг. 2. Образец тонкозернистого, плотного песчаника, покрытого тонким слоем глинисто-сланцевого материала с проблематическими отпечатками. Прожилки кальцита поперек наслоения. Крым. Долина р. Марты, ок. Биасалы. Коллекция В. И. Бодылевского. Нат. вел.

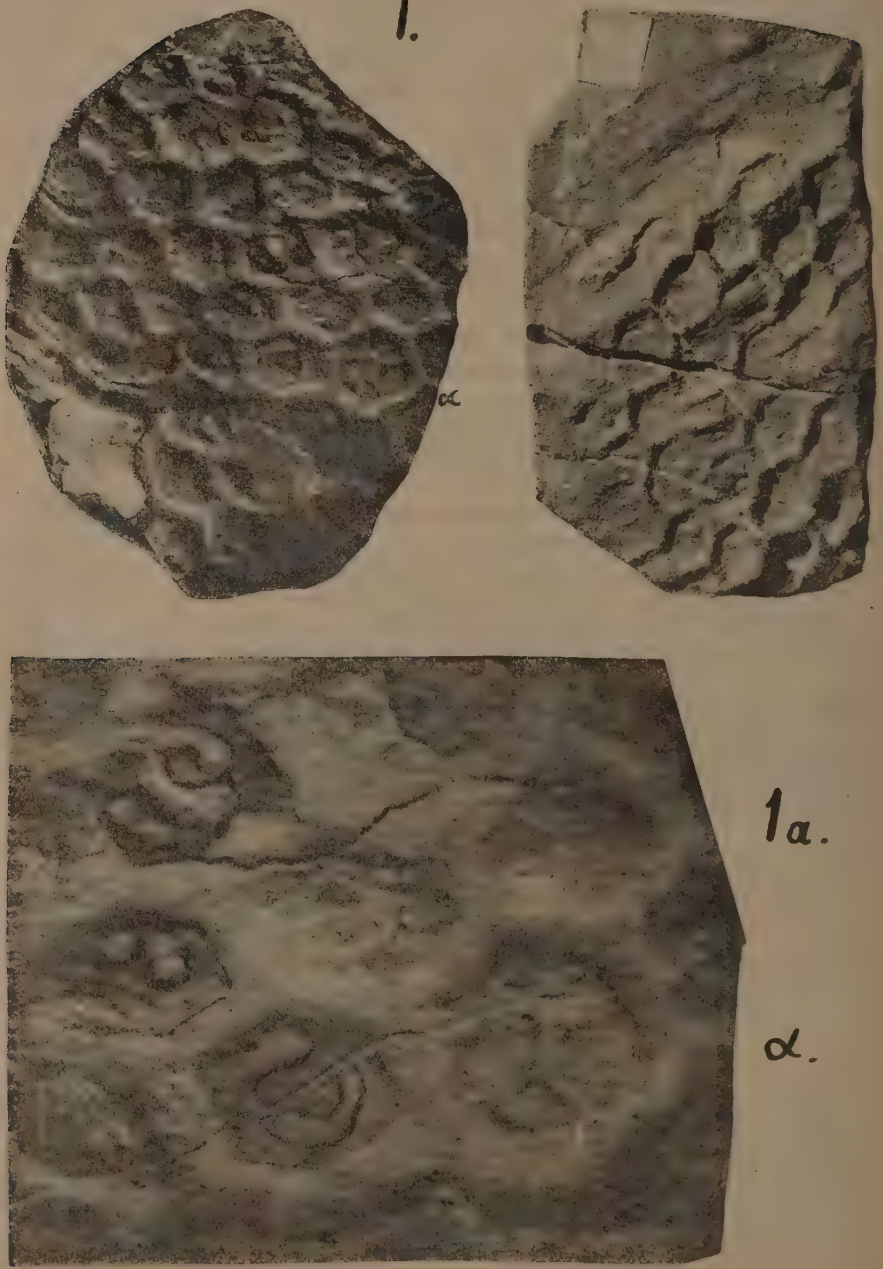
Фиг. 3. Образец, доставленный инж. Ф. И. Кандыкиным с р. Пышмы у д. Железный Перебор, Камышловский р. Уральской обл.

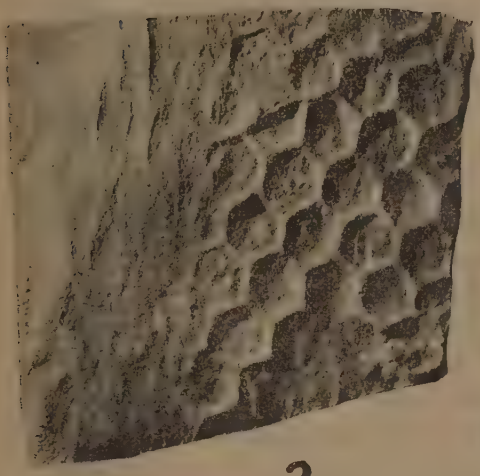
Фиг. 4. Образец Ф. И. Кандыкина из того же местонахождения. На поперечном фотографическом снимке (фиг. 4-а) этого образца (у нижнего края, фиг. 4) видно, как песчаная масса, превратившаяся затем в крепко сцементированный песчаник, проникала местами через земисто-песчанистые верхние части его до поверхностного тонкого глинистого слоя.

Фиг. 5. Части образца, доставленного Ф. И. Кандыкиным из той же местности, с указанием (x) места нахождения раковины. Нат. вел.

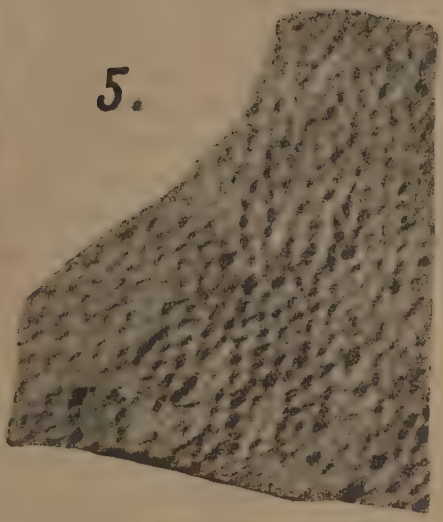
Фиг. 5а. Часть поверхности того же образца ок. сохранившейся раковины. Увел. 3 раза.

Фиг. 5б. Раковина (Corbula?). Увел. 4 раза.


1.
2.
α
1a.
α.



3.



5.

4.

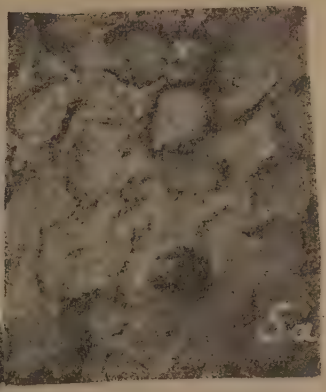
c.

g.

e

g

f



5a.

5в.

4a.

g'

f'

e'

Особый интерес представляет образец, доставленный инж. Ф. И. Кандыкиным (табл. II, фиг. 3). Очень тонкий слой темного, почти черного сланца с отчетливой шестиугольной поверхностью (часто с упомянутыми возвышениями в центре ячеек), налегает на песчаник, верхняя часть которого, на небольшую глубину, проникнута органическим перегнойным веществом. Первоначально илистый сланец проник и в вертикальные трещины песчаника, образуя на их стенках примазки, со следами шестиугольного сетчатого строения (см. на ровной стороне образца (c-d) табличной фиг. 4 и на части стороны ef, фиг. 4a и 4b). У края ef образца фиг. 4a видно коническое возвышение g с кратерообразной вершиной. На боковой стороне e′ f′ (фиг. 4a) вертикальный разрез конуса g′ показывает, что последний образован выпячиванием светлого песка (являющегося теперь твердым песчаником), приподнявшего покровный слой сланца, бывшего тогда илистым, землистым. У края «кратера» можно заметить маленькие возвышения, иногда с отверстием на вершине. Все это, мне кажется, свидетельствует о напоре газа, пробивавшегося наружу через песок и покрывавший его тонкий слой грязи.

За неорганическое происхождение *Paleodictyon* говорит и то обстоятельство, что он наблюдается исключительно на верхнем, наружном слое грязи, превратившейся в сланец.[1] Это и дало повод Hitchcock'у приписывать образование *Paleodictyon* движению головастиков, K. Mayer'у — считать его за продукт усыхания грязи и F. Sacco — за результат движения зыби на мелких местах водоемов, за продукт ритмического движения воды над мелководной грязью.

Я представляю себе возникновение вышеописанных шестиугольных, сетчатых образований, в случае их неорганического происхожения, следующим образом.

Еще в детском возрасте, близ берега Ильменского озера в Ю. Урале, я видел, как в болотной грязи выделяются в разных пунктах пузырьки (пузыри), одновременно или последовательно. Я нарушал такое выделение движением палки, причем наблюдалось более бурное выделение. Осторожное погружение тонкого прута сопровождалось выделением сравнительно крупного пузыря газа. Припоминая это обстоятельство и на основании изучения вышеуказанных признаков образцов, можно предположить, что в разлагающемся растительном материале, занесенном слоем мелкозернистого песка, покрытого затем тонким слоем илистого осадка, возникает болотный газ, который, проникая в слой песка и группируясь в нем в более крупные ско-

[1] Кроме, быть может, образца фиг. 5 (табл. II), на котором слой сланца вовсе не наблюдается и ячеистое строение которого объясняется иначе.

пления, проходит через прикрывающий его тонкий илистый слой, образуя круглые кратеровидные возвышения, при разрастании которых до взаимного соприкосновения возникают угловатые, большей частью, почти всегда, шестиугольные петли. Я полагаю, что искусственное воспроизведение *Paleodictyon* может быть достигнуто, кроме приемов Capeder'a, следующим образом. В плоской крышке герметически закрывающегося сосуда сделать очень мелкие отверстия в одной части крышки (для сравнения) в правильном шахматном порядке, в другой — без особого порядка; крышку покрыть слоем мелкого песка, накрыв последний тонким слоем глинистого материала. Налив предварительно в сосуд воды до определенного горизонта, нагревать сосуд до кипения и проникания пара через тончайшие отверстия в песчаный слой, а затем и в глинистый покров. В последнем будут образовываться сперва круглые петли, которые, разрастаясь до взаимного соприкосновения, примут многоугольную форму. Кипячение можно заменить, напр., растворением двууглекислого натрия в хлористоводородной кислоте следующим образом. В сосуд, если он металлический, поместить чашку с определенным количеством двууглекислой соды с таким расчетом, чтобы в герметическом сосуде получалось надлежащее давление, при котором CO_2 мог бы проникать через покрывающие сосуд в песчаный и илистый слои. Мне эти опыты в окончательном виде не удались, так как в условиях домашнего обихода я не смог сделать прибор настолько герметическим, чтобы эта герметичность не была быстро нарушена давлением пара ранее проникновения его через землистый покровный материал. Но при надлежащем лабораторном оборудовании, я считаю, опыт приведет к ожидаемому результату.

Позволяю себе присоединить нижеследующие строки.

С самого возникновения жизни на земле организмы в течение многих миллионов лет в их филогенетическом развитии проходили процесс переживания наиболее приспособленного — краткое выражение закона Дарвина — закона, которому подчиняются не только организмы (и их отдельные части), но и вырабатываются определенные условия их существования, иногда социального порядка, в некоторых случаях очень сложного (муравьи, пчелы и другие более высоко-организованные животные). Воздвигаемые ими постройки, как и составные части их организма, постепенно вырабатываются в направлении наибольшего сохранения энергии при наименьшей затрате материала (напр., соты, кости животных вообще, в частности кости и скелет птиц и многое другое).

Круглые (сферические), элипсоидальные, цилиндрические, шестигранные призматические формы являются распространенными в неорганической

природе и среди животных и растительных организмов как у целых организмов, так и у их частей. Формы эти являются результатом механических причин и могут быть объяснены путем математического анализа.

Обращаю внимание читателей на то, что в только что полученном, во время чтения корректуры, труде G. Wagner'a «Einführung in die Erd- und Landschaftsgeschichte» находится между прочим превосходный фототипический снимок дождевых капель, напоминающий образец фиг. 5 табл. II, но совершенно другого происхождения.

В статье A. Ch. Seward'a об ископаемых растениях Ю. Африки (Quart. J. Geol. S. LXXXVIII, pt. 3, 1932) на стр. 362 упоминается о неопределимом растении, на котором видны круглые углубления и отчетливое шестиугольное строение (pl. XXXIII, f. 5).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

К ПРОБЛЕМЕ БЕССМЕРТИЯ ПРОСТЕЙШИХ

(Двадцать лет культуры инфузории *Paramaecium caudatum* без конъюгации)

М. А. ГАЛАДЖИЕВА

(*Представлено* Бюро Биологической ассоциации)

Часть первая

ВВЕДЕНИЕ

Проблема бессмертия в последние годы, в связи с достигнутыми успехами экспериментальной биологии, вновь заняла видное место в биологической литературе.

Этот интерес был вызван, с одной стороны, новыми данными по культуре простейших в условиях изоляции и экспериментальными работами над некоторыми низшими многоклеточными животными (губки, кишечнополостные, турбеллярии), указавшими на возможность беспредельного вегетативнаго размножения, с другой стороны — достигнутыми результатами по культуре тканей в питательных средах вне организма и работами Штейнаха, Воронова и др. с омоложением.

В настоящее время едва ли можно уже сомневаться в том, что вопрос о потенциальном бессмертии простейших, в общем, решен экспериментально в положительном смысле. Однако, проблема бессмертия одноклеточных, выдвинутая в свое время, главным образом, Августом Вейсманом, и до настоящего времени не утратила своего интереса, и во многих лабораториях продолжаются экспериментальные работы по культуре различных простейших для решения целого ряда вопросов, связанных с их размножением.

После первых попыток протистологов раннего периода Saussure (64), Guanzati (35), Ehrenberg (24—25), Dujardin (23), Balbiani (2) и др. подойти к решению вопросов, связанных с бесполым размножением простейших посредством деления и дать физиологическое объяснение более или менее случайным наблюдаемым фактам, впервые вопрос о значении полового

процесса у инфузорий — конъюгации и решение вопроса о пределе их бесполого размножения был поставлен на путь систематического экспериментального изучения известным французским биологом Maupas (52—53).

В своих, прекрасно поставленных для своего времени, опытах Maupas исследовал размножение у 20 видов инфузорий.

Отсадив по одному экземпляру в нескольких капельках питательной среды и удаляя ежедневно всех лишних инфузорий — продукты размножения — кроме одной, Maupas таким образом лишал инфузорий возможности конъюгировать и в то же время мог точно зарегистрировать число получаемых генераций.

Как известно, таким путем им было установлено, что цикл размножения делением для каждого вида инфузории более или менее определенный и ограниченный.

В то время как одни виды могли размножаться не более 2—3 недель, другие формы прожили в культурах Maupas по несколько месяцев и дали несколько сот генераций. Но, под конец, и те и другие формы мельчали, переставали питаться и размножаться, вырождались и погибали. При этом, по наблюдениям Maupas, физиологическое состояние инфузорий не остается одинаковым в течение всего времени, и весь цикл размножения, какова бы ни была его продолжительность, распадается на три периода.

Период энергичного деления клетки, охарактеризованный Maupas как период молодости, сменяется периодом половой зрелости, в течение которого инфузории, при наличии внешних необходимых условий, конъюгируют, но если, по какой-либо причине, этого не произошло, неизбежно наступает последний период жизненного цикла — период старости. Энергия размножения постепенно начинает падать, появляются признаки старости, инфузории вырождаются и, наконец, как и для всякого живого организма, для инфузорий наступает неизбежный финал жизни — смерть.

Maupas указал даже число поколений для определенного вида инфузорий на каждый период. Так, например, для *Stylonichia pustulata* 1—130 поколений — период молодости; 130—170 поколений — период половой зрелости и 170—316 поколений — период старости.

Таким образом, по опытам Maupas только половой процесс в период половой зрелости и притом «удачная конъюгация» двух инфузорий, не связанных друг с другом близким родством, спасает их от старости и смерти, возвращая организму утраченную молодость с новым запасом жизненной энергии. Отсюда вторым и весьма важным выводом было то, что только слияние двух ядерных масс, по своему происхождению не род-

ственных друг другу, имеет действительно омолаживающее значение и дает жизнеспособное поколение.

Опытами Maupas, казалось, вопрос был вполне разрешен, а выводы имели настолько широкий общий интерес, что не могли не соблазнить многих биологов воспользоваться ими для построения теорий, охватывающих более широкие проблемы оплодотворения, старости и смерти и не только у простейших, но и у высших многоклеточных животных.

Противоположная точка зрения на природу простейших, как бессмертных организмов, способных размножаться делением бесконечно долго, не могла пользоваться такой популярностью, как идеи Maupas, базирующиеся на солидных данных эксперимента.

Идея о бессмертии одноклеточных была высказана еще Ehrenberg'ом (24). По его мнению размножение инфузорий делением, устраняя возможность индивидуального разрушения, делает их бессмертными. Они делятся бесконечно в течение бесконечного количества лет.

Но наиболее ярким защитником идеи бессмертия простейших был позже Weissman (66—67), выдвинувший впервые во всей широте проблему бессмертия. Оспаривая идеи Maupas и считая смерть лишь достоянием многоклеточных организмов, как расплату за их высокую дифференциацию, Weissman считает одноклеточных, в противоположность многоклеточным, потенциально бессмертными организмами, приписывая половому процессу у простейших вовсе не омолаживающее, а иное значение. «Глубокое значение всякой формы амфимиксиса», по мнению Weissman, «появляющегося как при конъюгации и оплодотворении, так и иным путем — заключается в создании той индивидуальной изменчивости, которая необходима для процесса отбора и которая возникает благодаря периодическому смешению индивидуально различных масс».

В таком положении оставались эти вопросы пока, после некоторого затишья, целым рядом биологов они не были вновь выдвинуты для проверки и разрешения.

Методика ведения культур простейших понемногу совершенствовалась, и многим экспериментаторам удалось довести свои культуры уже до 7—8 сот поколений. Результаты этих опытов, если отчасти и подтверждали правильность выводов Maupas, то во многих случаях показывали, что и в той и в другой своей части они не являются безусловно непогрешимыми.

Часто, после нескольких сотен поколений, культуры, несмотря на отсутствие конъюгации, сохраняли свою жизнеспособность, не обнаруживая каких-либо признаков изнашивания и старческого вырождения.

Не имея возможности в пределах краткого очерка подробно останавливаться на обширной литературе этого вопроса, я приведу лишь несколько цифр, указывающих число поколений, полученных некоторыми авторами у различных инфузорий.

Jonkowsky.	(48) 450	поколений у	*Pleurotricha lanceolata*
Calkins . .	(89) 742	»	» *Paramaecium aurelia*
Enriquez .	(28) 863	»	» *Glaucoma scintillans*
Woodruff .	(68) 860	»	» *Oxytricha fallax*
» . .	440	»	» *Pleurotricha lanceolata*
» . .	218	»	» *Gastrostyla* sp.
Gregory . .	(34) 548	»	» *Tillina magna*
Moody .	(59) 218	»	» *Spathidium spathula*
Calkins . .	(9) 446	»	» *Actinobolus radians*
» . .	224	»	» *Bleparisma undulans*
Автором этих строк[1] . . .	358	»	» *Dileptus anser*

Успех опыта в значительной мере находился в зависимости от методики. Одной из наиболее существенных причин, понижающих жизнеспособность культур, является самоотравление инфузорий накопляющимися в среде продуктами распада и бактериальных выделений [Enriquez и др.] (26). В этом отношении особенно показательными являются опыты Woodruff (69—70), который показал, что соответственно тому, состояла ли питательная среда из 2,5,20,40 капель, изменялась скорость делений: она возрастала на 2.5; 6.5; 7.5% по сравнению со скоростью делений в культуре из двух капель жидкости. Другими словами: чем гуще и быстрее будут скопляться в среде продукты распада, тем медленнее скорость деления. В другом опыте этот же автор в одной из контрольных культур, где среда возобновлялась не ежедневно, а приблизительно раз в 3 дня, получил типичную картину постепенного падения темпа делений, закончившуюся «старческим вырождением» и гибелью инфузорий, между тем как в основных культурах, где при тех же прочих условиях среда менялась ежедневно, инфузории продолжали размножаться с неослабевающей энергией.

[1] Работа с культурой одиночных *Dileptus anser* мною была начата 27 августа 1912 г. и продолжалась до конца июля 1913 г., т. е. без малого год. Темп размножения культур, подчиняясь периодическим колебаниям, до конца опытов не ослабел и инфузории не обнаружили никаких признаков вырождения. Вымирание культур произошло от недостатка подходящего корма. По неопытности сотрудника, на попечении которого находились в это время культуры, не были заблаговременно заготовлены культуры мелких инфузорий, которыми приходилось подкармливать этих хищников. Результаты этой работы, как не вполне законченной, до настоящего времени не были опубликованы.

Среди упомянутых работ особенного внимания заслуживают опыты Calkins (8—9), которому удалось довести свои культуры *Paramaecium aurelia* в продолжение 23 месяцев до 742 поколений.

На протяжении всего опыта культуры Calkins претерпели несколько периодов депрессий.

В первый раз признаки вырождения обнаружились приблизительно 6 месяцев спустя от начала опытов, после 200 поколения. Инфузории измельчали, перестали принимать и ассимилировать пищу, в протоплазме обнаруживались заметные структурные изменения, и культура стала вымирать, как полагал автор, от нарушения нормальных вегетативных функций. Заменив обычную среду — сенной настой — на несколько дней мясным экстрактом, автору удалось восстановить утраченную способность ассимиляции и нормальный темп размножения. Новый цикл размножения закончился вторым периодом депрессий после 198 новых поколений. На этот раз автору «омолодить» культуру удалось стимулированием фосфорнокислым калием, но в третий период депрессий на 600 поколений уже ни мясной экстракт, ни различные соли не могли восстановить утраченную способность размножения, и только действием вытяжки поджелудочной железы удалось продлить жизнь культуры еще на 142 поколения. В 4-й период депрессий культуры Calkins вымерли, несмотря на все принятые им меры спасти их. Первые 3 периода депрессий, когда, как полагал автор, причиной вымирания культур было только нарушение нормальных функций метаболизма, Calkins, пользуясь термином Р. Гертвига, назвал «физиологической старостью» и, как думал, такую «физиологическую смерть» можно предотвратить путем воздействия на клетку каким-либо возбуждающим средством.

В последний раз «лечение» не спасло инфузорий от смерти. И на этот раз физиологическая старость, по мнению автора, была преодолена: восстановилась нормальная структура цитоплазмы, инфузории стали принимать пищу и ассимилировать, но начинавшийся процесс деления не доводился до конца, и в результате получались патологические уродливые животные, не жизнеспособные и в конце концов вымирающие.

По наблюдениям автора на этот раз единственной частью клетки, не поддавшейся действию стимулирующих средств, был микронуклеус. Была израсходована вся потенциальная жизнеспособность; наступила зародышевая старость, и уже только половой процесс—конъюгация—могла спасти клетку от неизбежной зародышевой смерти, превратив ее в новый индивидуум, как оплодотворение превращает протоплазму зародышевой клетки и у высших животных в новый организм.

Опытами Calkins как будто подтверждалась теория Maupas, но все же автор должен был признать, что «у *Paramaecium* и вообще простейших мы находим относительно наибольшую потенциальную жизнеспособность зародышевой плазмы», и что в природных условиях различные соли и другие факторы, изменяющие условия внешней среды, без сомнения, стимулируют пониженную жизнеспособность, делая в большем масштабе то, чего достиг он сам в лабораторных условиях.

Не удавшаяся попытка Calkins спасти инфузорий в последний период депрессий культуры от зародышевой смерти, конечно, не могла быть достаточно убедительным доводом для признания необходимости конъюгации, как единственного возможного стимула для восстановления энергии размножения расы. И вообще, по данным опытов как Maupas, так Calkins и др. авторов, не было достаточного основания утверждать, что смерть инфузорий в культурах была следствием естественной старости клетки, исчерпавшей предопределенный заряд жизненной энергии. Не была исключена возможность, что в природных или иных, более совершенных лабораторных условиях явления старчества не окажутся неизбежными, и размножение без конъюгации может длиться значительно дольше полученных сроков. Еще меньше было оснований сделать выводы, что конъюгация, как половой процесс, будет иметь последствием омоложение инфузорий и подъем энергии размножения клетки. И как раз с этой стороны и был нанесен первый удар теории Maupas экспериментальными данными. Хорошо проверенными и весьма убедительно поставленными опытами Jennings (42—43) показал, что разъединенные в начальных фазах конъюгации, еще до обмена ядерными частицами, инфузории не только не погибают, но продолжают размножаться нормальным темпом, не обнаруживая каких-либо признаков вырождения. С другой стороны, этим же автором, как и другими, было выяснено, что в большинстве случаев конъюгация не только не подымает энергии размножения, но, наоборот, нередко частота делений после конъюгации резко падает. При этом выяснилось, что после полового процесса получается большое число вариаций как в отношении размножения, от полной утраты способности делиться до нормальной, так и в отношении других признаков [Jennings (43), Calkins and Gregory (14)]. В своих выводах Jennings, подтверждая высказанные в свое время идеи Weissman'a, говорит: «Нет очевидных доказательств в пользу того, что конъюгация инфузорий увеличивает силу размножения или каким-либо иным физиологическим путем содействует омоложению организма», и далее: ....«значение конъюгации заключается в том, что при ней возникают новые комбинации

зародышевой плазмы, как и при половом размножении высших животных».

Далее выяснилось, что конъюгация близко родственных между собой индивидов, удаленных от общей прародительницы-клетки всего на несколько поколений, не имеет никаких вредных последствий для них, и потомство получается не менее жизнеспособное, чем у эксконъюгантов, не родственных друг другу.

Таким образом, новыми данными теория Maupas в своей первой части, если была лишь поколеблена, то во второй она была окончательно подорвана, и вопрос о стимулирующем значении конъюгации в смысле омоложения инфузорий после работ Jennings отпал.

Но не хватало экспериментальных данных, указывающих на то, что вырождение культур не является следствием естественной и неизбежной старости, а зависит от случайных условий опыта и что цикл жизни инфузорий не ограничивается теми несколькими сотнями поколений, которые до сих пор были получены, а при наличии необходимых условий инфузории окажутся способными размножаться беспредельно долго, не старея и не вырождаясь.

Для решения этих вопросов требовались длительные опыты при такой методике, которая по возможности устраняла бы всякие случайности и наилучшим образом обеспечивала нормальное размножение культур.

В настоящее время мы имеем уже целый ряд таких работ, проведенных над различными *Protozoa*, которые дают право считать простейших потенциально-бессмертными организмами. Так, например, по более поздним данным, Enriquez (29) получил 2701 генерацию у *Glaucoma scintillans*, Woodruff and Moore (79)—1080 генераций у *Spathidium spathula*, Dawson (20)—590 генераций у *Histrio*, Beers (5)—1384 генерации у *Didinium masutum*, нами (35) было получено (до октября 1924 г.)—5212 генераций у *Paramaecium caudatum*, Woodruff (76)—13000 генераций у *Paramaecium aurelia*.

Кроме того, разными авторами такого же рода работы были проделаны и над другими простейшими и получены такие же не стареющие культуры. Например, Doflein (21—22) в течение многих лет путем пересадки на новые питательные среды культивировал патогенных трипанозом, и хотя размножение делением ни разу не прерывалось половым процессом, культура продолжала размножаться без всяких признаков старческого вырождения или депрессий. Такие же культуры были получены с амебами и некоторыми биченосцами (Erdmann, Doflein, Hartmann). С таким же успехом Belar (7) в течение 5 лет воспитывал культуры солнечника *Actinophris sol*.

Особенно интересными являются опыты Hartmann (36—38), который культивировал колониальную *Eudorina elegans*, и с 1915 года по февраль 1924 года этот организм, гаплоидная природа котораго исключала партеногенез, дал до 2500 индивидуальных поколений. Далее культура Hartmann проводилась в массовом порядке, но и здесь в условиях, исключающих возможность полового процесса культура была доведена до 3600 генераций. Несмотря на отсутствие полового размножения, колонии до самого конца опытов оставались совершенно нормальными, одинаково жизнеспособными и без всяких признаков вырождения.

Среди этих работ наиболее видное место занимают опыты Woodruff (72—76), пользующиеся теперь уже широкой популярностью.

Культуры Woodruff начаты были 1 мая 1907 г. и продолжались до мая 1915 г. Для опытов им был взят один экземпляр инфузории *Paramaecium aurelia*, которая после двукратного деления положила начало его четырем культурам. Опыт велся весьма тщательно, ежедневно изолируемые экземпляры переносились в свежую среду, которая по временам для разнообразия менялась (сенной настой, раствор либиховского экстракта, вода из различных естественных водоемом и т. д.). Благодаря хорошей методике культуры Woodruff продолжали из года в год размножаться без конъюгации, и при этом никаких признаков старческого вырождения инфузории не обнаруживали. При средней скорости размножения 1.74 поколения в сутки, культуры Woodruff за 8 лет опыта дали 5071 генерацию. Далее культуры Woodruff поддерживались, и хотя опыт велся в условиях, исключающих возможность конъюгаций, но уже без строгого учета генераций. В конце 1920 г. за $13^1/_2$ лет, по приблизительному подсчету, уже было 8400 генераций (74); в 1926 г. число поколений достигло до 11 000, а в 1929 г. Woodruff (76) насчитывал уже 13 000 генераций. Темп размножения, подвергаясь постоянным периодическим колебаниям, в течение всего времени в опытах Woodruff остается одинаковым, в пределах 53—56 поколений в месяц.

Почти одновременно с опытами Woodruff были начаты культуры С. И. Метальникова, которые вначале велись нами совместно в Петербурге, а затем продолжались и продолжаются до настоящего времени мною в Крыму и которым теперь уже более 20 лет.

Целью настоящего очерка является краткое изложение общей сводки, а главным образом добытых за последние годы результатов этой многолетней большой работы.

МАТЕРИАЛ И МЕТОДИКА

Исходным материалом для культур, начатых в феврале 1908 г. С. И. Метальниковым, послужила одна, выловленная им из дикой культуры, инфузория *Paramaecium caudatum*. Продукты размножения, полученные в результате нескольких делений, рассаженные по одиночке на 10 предметных стеклах с углублениями в питательную среду, положили начало его 10 основным культурам. К сожалению, в первые два года культуры велись без строгого учета числа поколений, и поэтому результаты этого периода не могли войти в общую сводку работы. В августе 1910 г. культуры С. И. Метальниковым были перевезены из Детского Села (где они велись до этого) в Петербургскую Биологическую лабораторию П. Ф. Лесгафта, и с этого времени, когда уже была выработана хорошая методика и велась ежедневная проверка и запись размножения культур, опыты до весны 1917 г. велись нами в Петербурге в зоологическом кабинете упомянутой лаборатории.

Позже, переехав в Крым, я перевез с собой культуры и, не прерывая работ, продолжал уже один вести опыты с 1917 г. до 1926 г. в зоологическом кабинете Таврического, а потом Крымского университета, а позже культуры были перевезены мною в Севастополь на Биологическую станцию Академии Наук, где и продолжаются до настоящего дня.

Результаты этой работы, по мере накопления материала, уже неоднократно появлялись в печати (54—58), и в последний раз общая сводка, в виде краткого сообщения, мною была опубликована в Известиях научно-исследовательского института П. Ф. Лесгафта (32) в 1924 году. К этому времени нашим культурам насчитывалось уже более 15 лет и было получено 5212 генераций.

Избегая повторений, я не буду здесь останавливаться подробно на методике, которая, в главных, чертах сходна с общепринятой методикой, выработанной еще Maupas и которая нами была уже более или менее подробно описана в ранее опубликованных статьях.

В нескольких словах она заключается в следующем: культуры представляют 10 предметных стекол с углублениями, на которых в питательной среде содержатся по одиночке на каждом стеклышке 10 инфузорий, — потомков одной, первоначально взятой для опыта *Paramaecium caudatum*. Стекла с культурами, для предотвращения испарения, содержатся в особых влажных камерах, представляющих собой небольшие прямоугольные цинковые ванны длиной в 30 см, шириной в 13 см и высотой в 2.5 см. В ваннах на двух параллельных стойках, прикрепленных ко дну и на некотором

расстоянии от него, помещаются в ряд предметные стекла с инфузориями. Культуры сверху прикрываются цинковым застеклепным, в виде односкатной кровли, колпачком, края которого заходят в ванну и должны быть погружены в налитую немного на дно камеры воду. Ежедневно, по возможности в одно и то же время, каждое стекло тщательно просматривается, число инфузорий на данный день записывается в дневнике в особую рубрику для каждой культуры, а затем из всех получившихся в результате размножения в течение суток инфузорий вылавливаются капиллярной трубочкой по одному экземпляру, которые переносятся в свежую среду для дальнейшего продолжения культур на другие стекла. Первые 10 стекол с оставшимися лишними экземплярами сохраняются до следующей проверки уже как контрольные культуры и запасные для замены изолированных экземпляров при случайных потерях. Через сутки после проверки и подсчета прежние контрольные культуры ликвидируются, на эти стекла переносятся в новую среду изолируемые подопытные экземпляры, а стекла с оставшимися продуктами размножения становятся запасными.

В качестве среды для культур служил вначале обычно употребляемый для этих целей сенной настой, а позже, чаще применялся слабый раствор либиховского мясного экстракта (в концентрации 0.025 г на 500 куб. см воды). Вода для сред бралась предпочтительнее снеговая или дождевая, как наиболее благоприятная для культур, что было отмечено нами в ранее опубликованной работе (57). По временам искусственно приготовленные среды заменялись водой из прудов, канав и даже мелких временных водоемов. В последние годы мною употреблялась среда, приготовленная следующим образом:

К обычной среде — сенному настою или раствору либиховского экстракта, или просто дождевой, или снеговой воде, на 100 куб. см прибавляется 1 г хорошей садовой или огородной просеянной через сито земли. Смесь несколько раз сильно взбалтывается, и через 1—2 суток отстоявшаяся жидкость употребляется как среда для культур.

Применение такой среды дает прекрасные результаты: жизнеспособность культур повышается, и инфузории становятся крупнее и размножаются интенсивнее. Даже сильно измельчавшие и находящиеся в состоянии депрессии инфузории, перенесенные в такую среду, скоро оживают, становятся крупнее и начинают размножаться нормальным темпом.

Идея прибавления земли к средам для культур возникла из такого рода соображений: уже неоднократно, как нами, так и многими другими авторами было установлено, что прибавление к среде в небольших дозах различных

веществ, в том числе фосфорнокислых, калийных и др. минеральных солей, стимулирует культуры и повышает жизнеспособность. В природных условиях несомненно, что весьма сложный и тончайший, едва поддающийся анализу состав солевого раствора водоема зависит от грунта и почвы, Мне казалось, что прибавление земли и внесет в среду тот сложный физико-химический комплекс, который имеется в природных условиях в каждом водоеме и который является естественным и наиболее благоприятным, если так можно выразиться, — физиологичным для водных организмов. Это нашло подтверждение в работах Е. Андреевой (1), указавшей насколько благоприятно влияние земли, находящейся на дне аквариума с инфузориями, на его население. На практике, как было сказано, результаты применения такой среды оказались чрезвычайно благоприятными, причем лучше всего такая среда, в которой успеет развиться в достаточной мере богатая и разнообразная бактериальная флора. Менее пригодны среды слишком свежие, только что приготовленные, равно как и старые, давно изготовленные и сильно истощенные.

Концентрация водородных ионов среды обычно колебалась в пределах физиологического интервала pH 8.30—7.80 и не могла иметь существенного значения в жизнедеятельности культур, как это выяснилось многими работами, появившимися в печати за последнее время: Савич (63), Johnson (45), Галаджиев и Мальм (33) и др.

Я остановился несколько подробнее на средах, так как в методике культур этот вопрос является наиболее важным и существенным. Часто, решающую роль в работе играет удачный выбор среды, от которой, главным образом, зависит весь успех эксперимента. Уже давно и неоднократно отмечалась в литературе отрицательная роль неподходящих сред в развитии культур (Bütschli, Maupas, Hertwig, Кулагин, Enriquez и др.). Здесь, помимо химического состава среды и ея загрязненности выделениями самих инфузорий, весьма существенное значение имеют токсические выделения бактериальной флоры. Если и можно оспаривать выводы Enriquez (26-27), что причиной неудач всех опытов предшествующих авторов было отравление культур бактериальными ядами, то во всяком случае нельзя не признавать громадного значения этого фактора. Chatton E. et M. (16), наблюдавшие *Paramaecium caudatum* в средах с разной бактериальной флорой пришли к выводу, что неодинаковая частота конъюгаций в разных культурах не является следствием каких-либо расовых особенностей, а скорее зависит от состава бактериальной флоры среды.

Необходимо еще добавить, что каждый раз вновь приготовленную среду, прежде чем применять ее, всегда следует подвергать испытанию,

оставляя в ней, по крайней мере на сутки, контрольных инфузорий. Иногда, правда очень редко, случается, что среда, особенно сенной настой, оказывается непригодной для культур, очевидно в зависимости от состава трав. И только после испытания оказавшаяся годной среда может употребляться для культур.

Посуда, стекла, полотенца и др. предметы, находящиеся в употреблении при опытах, должны быть идеально чистые и тщательно оберегаемы от случайных загрязнений, могущих оказаться гибельными для культур.

За исключением специальных опытов над параллельными культурами, поставленными для выяснения действия различных постоянных температур на скорость размножения и ведущихся в термостатах, основные культуры велись при комнатной температуре и, стало быть, постоянно подвергались ее нормальным колебаниям в пределах от 10—15° до 25—30° С. Надо сказать, что в пережитых условиях, особенно в годы гражданской войны, когда нередко и мы сами зимой сидели в неотапливаемых комнатах, культурам приходилось делить участь экспериментатора и иногда довольствоваться 6—8° С. Но в общем колебания температуры не переходили границ нормальных колебаний в жилых помещениях. Во избежание резких изменений температуры, культуры зимой содержались по возможности в комнатах с ровной температурой, а летом на теневой стороне и во всяком случае не под прямыми солнечными лучами.

По отношению к свету культуры также, по возможности, содержались в одинаковых условиях. Культуры освещались рассеянным светом, падавшим через стеклянную крышку влажной камеры.

Для того, чтобы составить общее представление о скорости размножения культур, выводилась средняя скорость размножения для 10 культур. Ежедневно подсчет всех инфузорий при осмотре стекол давал общую сумму инфузорий в 10 культурах. Затем, из полученного числа выводился коэффициент суточного размножения таким образом: если сумма инфузорий во всех 10 стеклах оказывалась равной 10, число поколений считалось равным нулю; если всех инфузорий было 20 — это обозначало одно поколение, 40 экземпляров — 2 поколения, 80—3, 160—4. Промежуточные числа давали число поколений, выраженное в соответствующих десятичных долях. Из средних чисел на каждый день легко выводилась средняя размножения за месяц, за год и какой угодно промежуток времени.

ТЕМП РАЗМНОЖЕНИЯ И ЧИСЛО ГЕНЕРАЦИЙ

Переходя к изложению результатов наших опытов, я прежде всего приведу таблицу размножения культур по годам, начиная с августа 1910 г.

по январь 1931 г. В третьей колонке приведенной ниже таблицы даны числа поколений за данный период времени, а в последней — средние числа поколений за это же время.

Таблица I

Год	За время	Число генераций	Коэффициент размножения
1910	5 месяцев	138	0.90
1911	12 »	394	1.08
1912	12 »	413	1.13
1913	12 »	397	1.09
1914	12 »	399	1.09
1915	12 »	238	0.65
1916	12 »	417	1.14
1917	11 »	380	1.15
1918	12 »	453	1.24
1919	12 »	429	1.18
1920	12 »	367	1.00
1921	12 »	358	0.98
1922	12 »	326	0.89
1923	12 »	270	0.74
1924	12 »	343	0.94
1925	12 »	386	1.06
1926	12 »	442	1.21
1927	12 »	444	1.22
1928	12 »	470	1.28
1929	12 »	416	1.14
1930	12 »	403	1.10

Итого за 20 лет 4 мес. 7883 генераций. Средняя скорость — 1.061 делений в сутки.

Как видно из приводимой таблицы, число поколений ежегодно меняется, и средняя суточного размножения постоянно отклоняется в ту или иную сторону от средней цифры — 1.061 — коэффициента размножения культур

за все время опытов. Крайними пределами этих колебаний будут числа 0.65—1.28, где, с одной стороны, мы имеем минимальную скорость размножения в 1915 г. (238 поколений), а с другой стороны, максимальный подъем энергии размножения в 1928 г., когда число поколений достигло 470.

Другими словами, деление инфузорий в 1915 г. происходило в среднем почти в 2 раза медленнее, чем в 1928 г. Но необходимо отметить, что такая резкая разница в скорости размножения здесь объясняется, главным образом, тем, что в 1915 г. лабораторные условия были чрезвычайно неблагоприятные для культур, следствием чего и было весьма вялое размножение инфузорий, в то время как в 1928 г. продукция культур достигла высшего предела за все время опытов. Вообще же говоря, интенсивность размножения наших культур колеблется сравнительно в небольших пределах, расходясь не очень сильно с цифрой среднего годичного размножения—386 поколений в год. Интересно отметить, что темп размножения наших культур, сравнительно со скоростью размножения культур Woodruff, значительно слабее. В то время как коэффициент размножения культур последнего равен 1.74 или около 600 поколений в год, наши культуры в среднем дали около 386 генераций, и средняя суточного размножения равна лишь 1.061 поколений.

Вот почему наши культуры за более чем двадцатилетний период дали только 7883 генерации, между тем как у Woodruff уже за $13^1/_2$ лет, как было выше упомянуто, культуры дали около 8400 поколений.

Итак, в условиях, исключающих всякую возможность конъюгации, с августа 1910 г. по 1 января 1931 г., в продолжении 20 лет и 4 месяцев культуры инфузории *Paramaecium caudatum* в лабораторных условиях, при комнатной температуре, при средней скорости размножения равной 1.061 поколений в сутки, т. е., делясь несколько быстрее 1 раза в день, дали 7883 генерации.

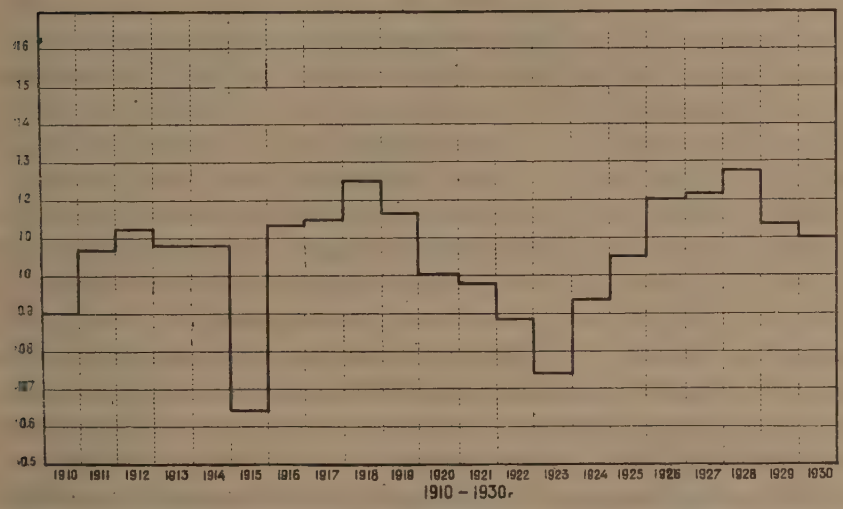
Для того, чтобы составить себе конкретное представление о значении полученных цифр и той, теоретически возможной массы живого вещества, которую составило бы все потомство одной микроскопически малой инфузории за это время, надо вспомнить некоторые цифры, полученные авторами путем вычислений.

По вычислениям С. И. Метальникова (54) одна инфузория-туфелька, делясь один раз в сутки, уже через месяц дает потомство, число которого будет равно 1 073 741 824. Если выразить количество живого вещества в объемах, допуская, что тело 1000 инфузорий составляют 1 куб. мг (в действительности это будет гораздо больше), то уже через 40 дней масса жи-

вого вещества потомства одной инфузории составила бы 1 куб. м, а через 4 месяца она по объему была бы значительно больше земного шара. Через 5 лет микроскопические тельца всего потомства одной инфузории, по вычислениям Woodruff, заняли бы объем, превышающий величину земного шара в 10 раз.

Для построения тела небольшого многоклеточного организма, как, например, коловратки *Hydatina senta*, у которой по точным подсчетам все тело состоит из 959 клеток, или какой-нибудь тихоходки *(Macrobiotus huffe-*

Таблица II



Кривая размножения культур по годам за 20 лет (1910—1930). По оси абсцисс — время; по оси ординат — коэффициент годового размножения (средняя скорость суточного размножения культур за каждый год).

landi) достаточно уже 8—10 клеточных делений, но даже для создания тела самого крупного животного на земном шаре достаточно нескольких сотен или даже десятков делений. Можно ли себе, даже приблизительно, представить всю массу, которую составили бы в совокупности тела всего потомства одной инфузории, давшей 7883 поколения, или, иначе говоря, массу живого вещества 2^{7883} сравнительно очень крупных клеточных единиц?

Для более наглядного представления годичных колебаний скорости размножения наших культур привожу кривую (табл. II), составленную из средних чисел суточного размножения инфузорий по годам.

Кривая размножения составлена таким образом: по оси абсциссы отложено время, начиная с 1910 г. и кончая 1930. Ордината каждого года представляет коэффициент размножения культур за этот период (среднюю скорость суточного размножения за год). На диаграмме с первого взгляда бросаются в глаза три вершины максимального подъема энергии размножения — в 1912 г., 1918 г. и 1928 г., между которыми вклиниваются два минимума — в 1915 г. и 1923 г. Первое резкое падение энергии размножения в 1915 г., как выше отмечено, было вызвано, в значительной мере, исключительно неблагоприятными для культур внешними лабораторными условиями. Но уже в следующем году скорость размножения так же резко повысилась, достигнув цифры несколько большей средней за весь прешествующий период, и далее этот подъем продолжался до конца 1918 г., когда культуры за год дали наибольшее число поколений сравнительно с предшествующими годами, и коэффициент достиг 1.24. Начиная с 1919 г., кривая размножения из года в год постепенно начала падать, и хотя никаких признаков вырождения культур нельзя было обнаружить, такое неуклонное падение энергии размножения могло казаться постепенным истощением, угасанием жизненой энергии инфузорий. В 1923 г., несмотря на отсутствие очевидных, резко выраженных неблагоприятных внешних условий, культуры дали уже за год только 270 генераций. Судя по кривой, можно было ожидать и дальнейшего падения энергии размножения, хотя, повторяю, никаких угрожающих симптомов вымирания культур не было, инфузории выглядели совершенно нормальными, и культуры были так же жизнеспособны, как и в самом начале опытов. В следующем 1924 г. коэффициент размножения, хотя и не достиг средней цифры, все же значительно поднялся (до 0.94), и начавшийся подъем энергии размножения, постепенно возрастая, достиг в 1928 г. высшего предела — 470 поколений за год. За все время опытов этот год был наиболее продуктивным, и коэффициент поднялся до 1.28. В 1929—1930 гг., кривая, как видно, опять стала несколько падать, но нет никаких оснований усматривать в этом признаки упадки энергии размножения культур.

Приведенная кривая дает лишь общую картину колебаний скорости размножения культур по годам, не давая никакого представления о колебаниях скорости размножения в пределах года, месяца и более короткого промежутка времени.

Для полного представления этого темпа, разумеется, следовало бы составить кривую из средних размножения за каждый день. Но такая кривая за много лет заняла бы слишком много места, и поэтому, схематизируя кар-

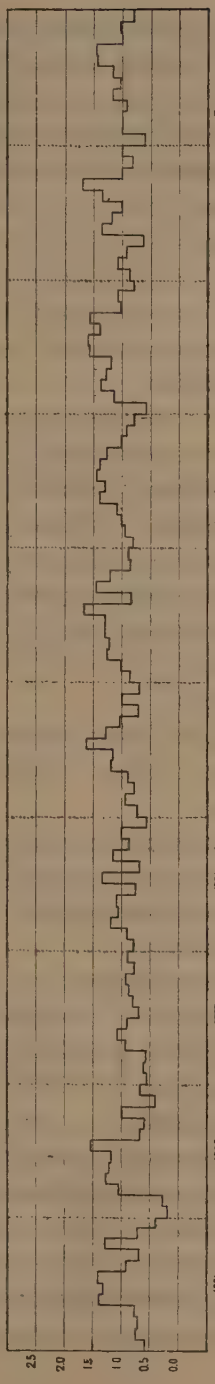
тину размножения, но стремясь дать представление о месячных колебаниях энергии размножения, я привожу ниже (табл. III) кривую размножения культур за последние 10 лет:[1] с 1 января 1921 г. по 1 января 1931 г., с вершинами среднего суточного размножения на каждый месяц.

На этой кривой, как и на предыдущей, по оси абсцисс отложено время, а ординаты представляют коэффициент размножения за каждый месяц.

Кривая представляет неправильную ломаную линию, не подчиняющуюся какой-либо строго-определенной закономерности, постоянно меняющуюся и на протяжении 10 лет никогда не повторяющуюся в своих деталях. Единственный общий вывод, который можно было бы сделать из оценки кривой, это тот, что в годичный период вершины к средине года, в общем, имеют тенденцию подыматься: размножение происходит интенсивнее и коэффициент больше. В начале же года и в конце его вершины более низкие, размножение замедляется, коэффициент падает. Если бы еще более детализировать и вычертить кривую с вершинами за более короткие промежутки времени — за 10, 5 дней или даже за каждый день — кривая получилась бы такого же порядка. Она всегда представляет ломаную линию с внезапными взлетами и опусканиями вершин. Энергия размножения постоянно колеблется то усиливаясь, то затухая независимо от общего подъема и падения по сезонам.

[1] Диаграмма размножения культур за предшествующий период, от начала опытов до 1921 г., была напечатана в ранее опубликованном сообщении и поэтому для экономии места здесь не приведена.

Таблица III



Кривая размножения культур по месяцам за последние 10 лет (1921—1930). По оси абсцисс — время; по оси ординат — коэффициент месячного размножения (средняя скорость суточного размножения культур за каждый месяц).

В данном случае, на приведенной кривой, подъем вершин в средние месяцы года обусловлен, главным образом, влиянием температуры. Но независимо от температуры, независимо от влияния физико-химических условий среды, количества и качества пищи и других внешних факторов, изменяющих темп размножения, существует еще определенный ритм размножения, который на такой общей схематизированной кривой, конечно, замаскирован и который выявляется только на кривых, составленных из средних за краткие отрезки времен (см. дальше[1] таблицы VI—XI).

В числе внешних факторов, имеющих наиболее заметное влияние на темп размножения культур, на первом месте надо поставить влияние температуры.

Как известно, многие процессы жизнедеятельности, в том числе и размножение простейших, до известной степени подчинены закону Van't-Hoff.

Многими авторами, как и нами на параллельных культурах, было установлено, что повышение температуры на каждые 10° ускоряет, примерно, вдвое размножение инфузорий. Хотя наши культуры и оберегались от резких температурных изменений, но все же сезонные колебания комнатной температуры, при которой велись опыты, значительны, нередко падая зимою до 10—15° С (а часто бывало и ниже) и подымаясь до 25—30° летом.

И, как общее явление, можно отметить, что в середине года, в связи с более высокой температурой, заметно и общее повышение вершин кривой.

Еще более наглядно такая зависимость скорости размножения от сезонной температуры видна на приводимой ниже кривой, составленной из средних чисел размножения на каждый месяц, по полученным данным за 20 лет жизни культур.

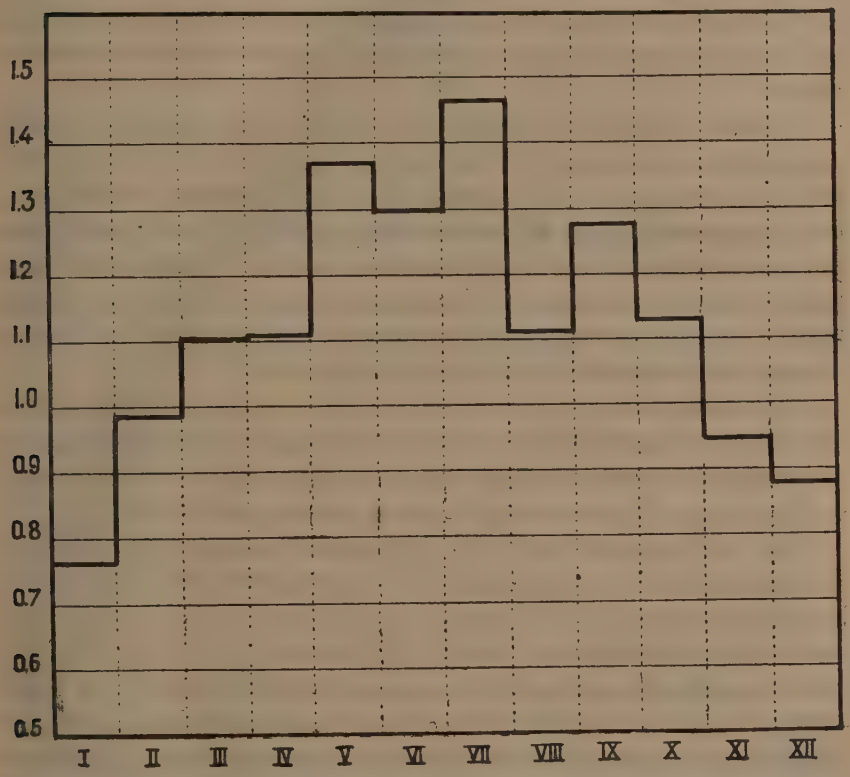
Если сравнить эту кривую с кривой температуры, то получилось бы очень близкое совпадение, которое могло быть, вероятно, и более полным, если бы культуры велись за все время опытов в более однородных условиях, чем это было на самом деле. В связи с переходом культур из одной лаборатории в другую, а нередко и в жилые квартиры по случаю недостаточного отопления, температурные условия постоянно менялись и не было возможности выровнять их. Только в начале опытов, в первые годы культуры велись в более или менее нормальных лабораторных условиях, а затем уже, в последние 5 лет, опять появилась возможность вести опыты в вполне нормальной лабораторной обстановке.

[1] Во второй части работы, в след. номере ИМЕН.

Тем не менее, благодаря солидному статистическому материалу — данным за 20 лет, кривая на таблице IV значительно выравнивается и хорошо отражает зависимость частоты деления от температуры.

Начиная с января, к середине лета частота делений все возрастает, достигая максимума в июле. Некоторое падение энергии размножения

Таблица IV



Кривая средней скорости размножения культур по месяцам. По оси абсцисс — время (январь—декабрь). По оси ординат — средняя (за 20 лет) скорость размножения культур в каждый месяц.

в июне, после значительного подъема в мае, объясняется, быть может, тем общим явлением, которое можно отметить, как правило, не только для данной и предыдущей кривой (табл. III), но и всякой кривой размножения за любой промежуток времени. Всегда после сильного подъема жизненной энергии наступает период упадка, как реакция после напряженного интенсивного размножения. Отчасти, может быть, этим же и объясняется резкое

падение кривой в августе, несмотря на августовский температурный максимум. Но здесь еще большее значение имеет то, что именно этот августовский максимум уже часто выходит за пределы оптимальной температуры и действует угнетающим образом на процессы размножения.

Точно так же значительный подъем вершин кривой в сентябре есть результат, с одной стороны, скачка после периода упадка и, с другой стороны, вновь установившихся, более благоприятных температурных условий.

Далее к концу года, по мере падения температуры, кривая постепенно падает и, достигнув январьского минимума, с февраля начинает вновь подыматься.

Влияние химического состава среды: та или иная концентрация солей, присутствие или отсутствие тех или других элементов в ней, количество и качество пищи в среде — в совокупности имеют, разумеется, большое значение для жизни культур. Колебания концентрации водородных ионов в средах в тех пределах, в каких они происходили, конечно, существенного влияния на процессы размножения не могли иметь, но все же, как один из факторов среды, до известной степени должны были отразиться на скорости размножения и наложить свой отпечаток на кривой.

Наконец, постоянно меняющееся физиологическое состояние живого организма, его динамика в непрерывной цепи процессов конструктивного и деструктивного метаболизма, несомненно является одним из наиболее важных факторов, обусловливающих характер кривой размножения.

Все эти факторы, представляя переменные величины и действуя одновременно, взаимно уравновешиваясь или суммируясь в своем действии, могут стимулировать энергию размножения или затормаживать ее, и благодаря этому кривая размножения всегда представляет неправильную ломаную линию с неожиданными взлетами и падениями вершин и никогда не повторяется в своих деталях, так же, как мало шансов повторения сцепления в определенной комбинации многочисленных факторов, обусловливающих темп размножения. Однако, учет этих весьма сложных взаимоотношений среды и экспериментируемого объекта не входил в нашу задачу, и здесь приходится говорить о них постольку, поскольку анализ кривых размножения показывает эту весьма сложную зависимость.

Массовой гибели при глубоких явлениях депрессий, в смысле Maupas и Calkins, за все время опытов в культурах не наблюдалось. Единственный такой случай, когда культуры находились под угрозой, был летом 1923 г. В конце июля, после периода энергичного размножения, инфузории в отдельных культурах вдруг перестали делиться, сильно измельчали и появи-

лись признаки депрессий. Начавшаяся гибель отдельных экземпляров приняла характер эпидемии, и культуры едва не погибли. Все попытки спасти инфузорий переменой пищи и среды, стимулированием различными средствами, не привели ни к чему. К счастью, во время была обнаружена причина этой эпидемии. Оказалось, что культуры были заражены какими-то патогенными бактериями, и только после тщательных промываний удалось изолировать инфузорий и спасти культуры от окончательного вымирания. После этого быстро восстановились нормальные функции метаболизма, и культуры стали попрежнему процветать.

Кроме этого случая массовой гибели, конечно, на протяжении всего опыта не могли не быть единичные случаи гибели отдельных индивидов по той или иной линии культур.[1]

Иногда причиной гибели инфузорий были явно выраженные функциональные нарушения процессов метаболизма. Инфузории переставали принимать пищу, размеры их значительно уменьшались, тело ссыхалось, эндоплазма становилась вакуолизированной, как у голодающих инфузорий, и под конец, нередко, макронуклеус распадался на несколько частей. В других случаях картина весьма напоминала ту, какую Calkins описывает, как типичную для периодов депрессий. Протоплазма утрачивала свою ячеистую структуру, становилась плотной, зернистой, макронуклеус оставался без видимых изменений, но микронуклеус в этих случаях всегда казался несколько гипертрофированным.

Наконец следует упомянуть еще о трех случаях гибели инфузорий от так называемой зародышевой смерти. Из них два случая имели место в августе 1923 г., а последний — в июле 1927 г., в периоды энергичного размножения. При нормальных функциональных отправлениях метаболизма, сохраняя свою нормальную структуру плазмы, инфузории вдруг оказывались не в состоянии довести начатые процессы деления до конца. Вследствие нарушения по какой-то причине функций деления, последнее задерживалось и не происходило полностью. В результате чего, после нескольких повторных неудачных делений, получались уродливые, химерические формы на подобие тех, которые были подробно описаны Calkins (11—13). Во всех трех случаях инфузории, «проболев» 12—17 дней, погибали.

Но необходимо подчеркнуть, что все эти отдельные случаи носили характер чисто индивидуальных, случайных «заболеваний» и ничего общего

[1] Во всех случаях гибели или случайной потери подопытной инфузории, они заменялись из «запаса», т. е. из числа дочерних инфузорий одной генерации, оставленных накануне для контроля.

с описанными «периодами депрессий» (Calkins) или «старческим вырождением» культуры (Maupas) не имели. Культуры в целом оставались совершенно жизнеспособными, и даже клетки-сестры, оставленные для контроля и заменявшие «заболевшие» экземпляры для продолжения линии, размножались, как и все другие инфузории культур, нормальным темпом, не обнаруживая признаков вырождения.

Не останавливаясь подробно на опытах, поставленных с целью дать возможность конъюгировать этим утратившим «молодость» инфузориям, предоставляя им для этого самые подходящие условия, ограничусь указанием, что все эти попытки, как и следовало, впрочем, ожидать, не привели к положительным результатам. Не удалось ни разу добиться того, чтобы «больные» инфузории конъюгировали как между собой, так и с другими, взятыми из разных культур в моменты наибольшего разгара эпидемии конъюгации и с сильно выраженной тенденцией к спариванию. В то время как последние легко соединялись в конъюгирующие пары, взятые подопытные инфузории никогда не конъюгировали и не обнаруживали никакой склонности к ней. Неоднократно также предпринимались меры «лечения» таких больных инфузорий, т. е. попытки вернуть им утраченную жизнеспособность стимулированием различными агентами, как это делал Calkins и другие со своими культурами. Но и здесь, в большинстве случаев, попытки спасти инфузорию от смерти кончались безуспешно. Из более чем двух десятков случаев лечения таких «заболевших» инфузорий положительный результат дали только 4 случая и все они имели место при заболеваниях второго из вкратце охарактеризованных выше типов, а именно: когда инфузории переставали делиться, уменьшались в размерах, а протоплазма становилась зернистой, плотной; казавшийся увеличенным, по отношению к уменьшившемуся телу, макронуклеус, повидимому, оставался неизмененным, но микронуклеус выглядел несколько гипертрофированным. Из состояния такой «физиологической старости» инфузории были выведены мною один раз путем стимулирования свежим мясным экстрактом, а в остальных случаях переменой среды — сенного настоя на слабый раствор либиховского экстракта в дождевой воде с примесью земли. Эти опыты, с одной стороны, как будто подтверждают полученные Calkins результаты. «Лечение» действительно вывело инфузорий из состояния депрессии и предотвратило «физиологическую смерть»; но в то время как в культурах у названного автора это явление «физиологической старости» было следствием истощения потенциальной жизненной энергии всей культуры, и вся она была в состоянии депрессии и должна была бы вымереть, если бы не была подвергнута сти-

мулированию, — в наших опытах эти случаи были редки и изолированы в культурах в виде единичных индивидуальных «заболеваний».

Еще более важным является здесь то обстоятельство, что «омоложение» инфузорий оказалось не временным, как у Calkins, до следующего периода депрессии, но в наших опытах поправившиеся после «лечения» инфузории начали нормально размножаться, и потомки их до сего дня продолжают жить уже в 2676 поколении. При этом инфузории не только не пришли к неизбежной «зародышивой старости», но и «физиологическая старость» с тех пор не повторилась, и культуры этой линии так же жизнеспособны по сей день, как и те, у которых не было никаких депрессий.

Во всех прочих случаях «заболеваний» при функциональных нарушениях метаболизма, когда инфузории постепенно истощались с резко выраженными признаками голодания, с сильно изуродованным телом от чрезмерной вакуолизации плазмы и в трех описанных выше случаях с нарушением функций деления, теми средствами, которые были применены, спасти инфузорий не удалось. Очевидно, здесь поражения были более глубокие и требовались иные меры лечения, если вообще спасение их еще было возможно.

Просматривая записи в дневнике за последние 10 лет опытов и описание всех отдельных случаев «заболеваний» инфузорий в культурах, приходится констатировать, что картина и история заболеваний чрезвычайно пестра и многообразна. Почти каждый случай отличается своими особенностями как патологией структуры плазмы, макро- и микронуклеуса, так и продолжительностью болезни. Подогнать все случаи к той общей характеристике, которую дает Maupas, описывая признаки «старчества» в вырождающихся культурах, или Calkins «физиологической» и «зародышевой» старости, никак нельзя. Почти каждый случай представляет индивидуальное заболевание, по всей вероятности, с весьма сложной этиологией, разобраться в которой у нас нет еще достаточных данных и которые ничего общего с массовой депрессией культур не имели. Одно можно сказать с уверенностью это то, что смерть отдельных инфузорий не была следствием исчерпанной жизненной энергии культуры. Это были такие же случайные заболевания, какие поражают одного среди многих здоровых и жизнеспособных организмов, подвернувшегося под удар рокового случая, выхватившего его из жизни.

Культуры же оставались, как и до настоящего времени остаются, неизменно жизнеспособными и здоровыми.

Размножаясь делением с неослабевающей энергией непрерывно уже более 20 лет без конъюгации, инфузории, за исключением некоторого измельчания, как следствия содержания в лабораторных условиях в ограниченном объеме среды, в 7883 поколении имеют совершенно здоровый нормальный вид, ничем не отличаясь от любой *Paramaecium caudatum*, выловленной из какого угодно водоема.

Таким образом, если этих опытов и недостаточно для утверждения абсолютного «бессмертия» инфузорий, если эта проблема и вообще не разрешима экспериментальным путем, они все же дают прочное доказательство тому, что основным свойством живой материи инфузории является способность беспрерывно, без полового процесса и обновления путем амфимиксиса, в бесконечном потоке жизненных процессов, созидать и накоплять живое вещество, беспредельно увеличиваясь в своей массе.

КОНЪЮГАЦИЯ И ЭНЕРГИЯ РАЗМНОЖЕНИЯ

Таким образом 20-летний опыт с несомненной ясностью показывает, что инфузории остаются жизнеспособными и размножаются с неослабевающей энергией, несмотря на то, что ни разу за это время не конъюгировали и не имели возможности обновить массу живого вещества своего тела путем полового процесса. Но в то же время было весьма важно и интересно выяснить, как будут вести себя инфузории после нескольких тысяч генераций, если им предоставить возможность конъюгировать, и как это отразится на их потомстве, как в отношении жизнеспособности инфузорий, так и в отношении частоты деления.

Уже вскоре после начала наших опытов, в первые же годы жизни культур, нами неоднократно делались попытки получить от одиночных культур конъюгировавшие инфузории, путем разведения массовых культур из отобранных при проверке лишних экземпляров. Но опыты не давали положительных результатов. Ни изменениями сред, путем прибавления различных веществ, ни голоданием, ни продолжительным выдерживанием сильно размножившихся отсаженных инфузорий в несменяемой среде, где накоплялись в большом количестве продукты распада густого населения, — мы не могли вызвать эпидемии конъюгации и не удавалось получить конъюгировавших инфузорий, чтобы развести параллельные культуры для сравнения с основными не конъюгировавшими. Казалось инфузории утратили эту способность и, после нескольких лет размножения без конъюгации, половое размножение стало для них невозможным.

Но полученные отрицательные результаты, конечно, не могли решить вопроса, и время от времени попытки вызвать конъюгацию возобновлялись: отобранные экземпляры отсаживались под контроль в небольшие баночки с несменяемой средой, где они размножались и имели возможность конъюгировать.

Только в сентябре 1922 г., когда культуры дали свыше 4650 поколений, был получен первый удачный опыт с конъюгацией. 2 сентября от одной из 10 основных культур (A_8), после изоляции одной из 4 полученных за сутки инфузорий, оставшиеся 3 экземпляра были пересажены в баночку вместимостью около 50 куб. см со старой средой (раствор либиховского экстракта, приготовленный недели за 2 до опыта). Инфузории, в особенности вначале, пока среда еще не была истощена и загрязнена, быстро размножились, и в короткое время получилась густо населенная культура, которая, однако, в скорости начала приходить в упадочное состояние. В это время и вспыхнула эпидемия конъюгации.

Первые пары конъюгирующих инфузорий были обнаружены в культуре 23 сентября, а 25 — эпидемия была уже, повидимому, в разгаре и встречалось много конъюгирующих пар. Тогда же мной было изолировано 10 пар конъюгирующих на отдельные стекла, а затем, после окончания процесса, 20 инфузорий, рассаженные на отдельные стекла, положили начало 20 культурам. К сожалению, трудности условий работ того времени и временная болезнь принудили меня в скорости прекратить начатые опыты, которые за короткое время не могли дать результатов для сравнения с основными культурами. Но уже самый факт конъюгации имел большое значение, давал надежду повторения его и возможность поставить новые опыты.

Следующий случай конъюгации нами был получен в августе 1924 г., когда культуры дали уже свыше 5200 генераций. Но выполнить план намеченной работы и на этот раз не удалось, и только в конце 1928 г. и в начале 1929 г. были проведены опыты с культурами конъюгировавших *Paramaecium*, результаты которых дали определенные ответы на поставленные вопросы.

На этот раз эпидемия конъюгаций была обнаружена в культуре, полученной из отсаженных запасных экземпляров основных культур A_1 — A_{10}, которые к этому времени дали уже 7003 поколения. 10 ноября 1928 г., после проверки, все «запасные» инфузории были пересажены в небольшую плоскодонную пробирку, в которую было налито 10 куб. см отфильтрованной среды, взятой из одной застарелой «дикой» культуры, где была как раз

в это время вспышка эпидемии конъюгации.[1] Культура, в которой, в особенности в начале, инфузории быстро размножились, подвергалась ежедневно контролю, и уже 12 ноября были обнаружены в ней первые конъюгирующие пары. На следующий день, 13 ноября, из культуры было выловлено 10 пар конъюгантов и рассажено на отдельные стекла с углублениями в обычную среду для культур, а 14-го, после разъединения эксконъюгантов (А и В), каждая инфузория была изолирована, и таким образом получилось 10 пар стекол с инфузориями: IA, IB — XA, XB. 15 ноября большая часть инфузорий успела разделиться, и мы уже имели от каждой пары по 4 линии: 2 — от эксконъюганта А — a_1 и a_2 и 2 от В — b_1 и b_2. Далее, 17 ноября, нами было отобрано из всех первоначально взятых 10 лишь 5 пар для опытов, где было закончено вторичное деление и, таким образом, было положено начало 5 культур (I—V) по 8 линий в каждой: 4 — от эксконъюганта А и 4 — от В (a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2 и b_1^1, b_1^2, b_2^1, b_2^2). В то же время от основных культур, от которых произошли конъюгировавшие, была выделена ветка, которая дала культуру VI, как контрольную для сравнения с первыми. В результате получилось 6 культур по 8 линий в каждой: I—V конъюгировавших и VI не конъюгировавших инфузорий. В дальнейшем культуры, представлявшие 48 отдельных стекол с изолированными инфузориями, велись при совершенно одинаковых условиях по принятому общему методу: с ежедневной проверкою, изоляцией и сменой среды. Опыты продолжались до конца марта 1929 г., т. е. начиная со дня первого деления — 15 ноября 1928 г., на протяжении 138 дней. Результаты сведены на прилагаемой таблице V.

Порядок номерации культур на таблице не соответствует протокольной номерации, но для удобства сравнения они здесь мною расположены в порядке выживаемости культур, что, впрочем, не меняет сути дела. Последняя культура VI, как было сказано выше, представляет собою контрольную (не конъютировавших инфузорий), все линии которой начаты одновременно с первыми, после троекратного деления выделенной особи.

Продолжительность жизни каждой линии всех культур на таблице представлена жирной чертой. Цифры над линиями указывают число гене-

[1] Применение такой среды в качестве стимулирующего средства вызвать конъюгацию не было делом простого случая, а находилось в связи с проделанным рядом опытов. При испытании различных средств вызвать в свежих культурах эпидемию конъюгаций, весьма интересные результаты дали опыты со средами, взятыми из культур в различные моменты эпидемии конъюгаций. Положительные результаты этих опытов, на которых не считаю возможным здесь останавливаться, дали повод применить такую среду для получения конъюгации у инфузорий одиночных культур.

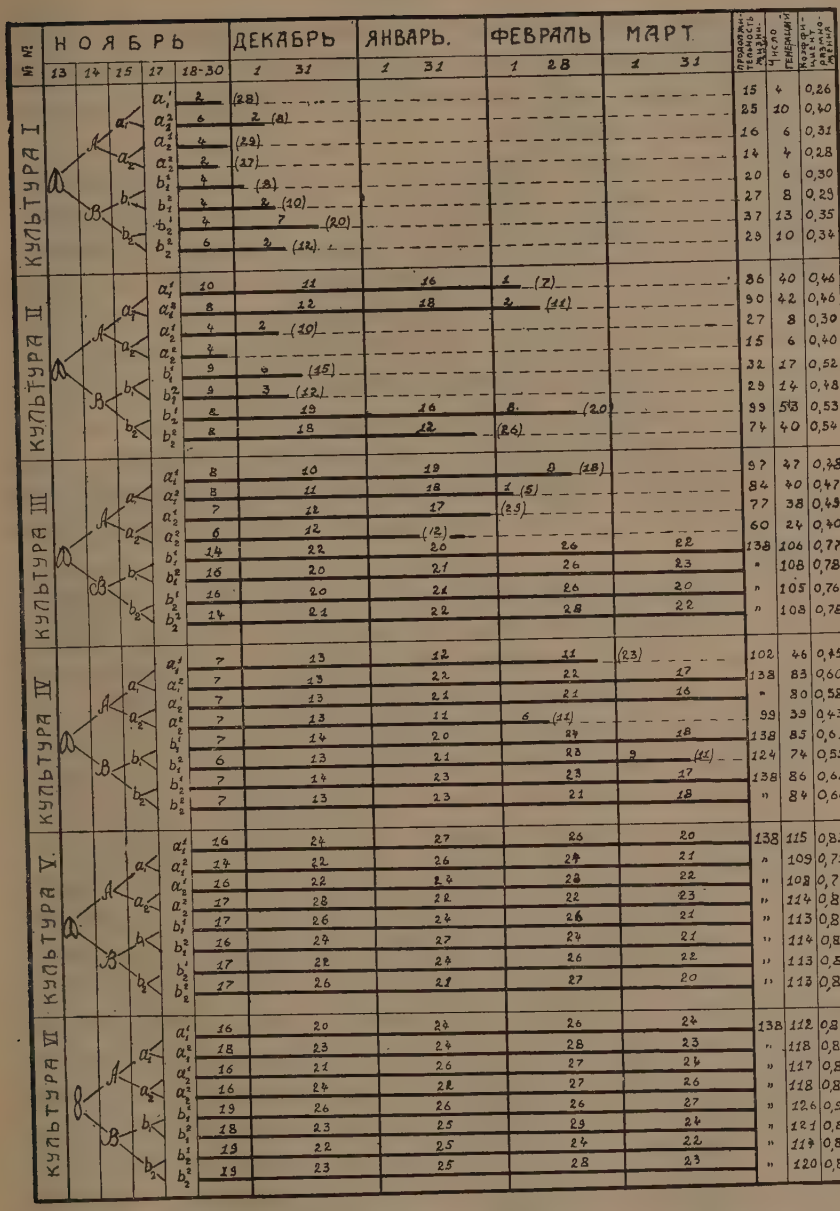


Диаграмма размножения культур конъюгировавших (I—V) и контрольной культуры не конъюгировавших (VI) инфузорий. ∞ — конъюгирующие пары; 8 — делящаяся особь; A и B — разъединившиеся конъюганты (культ. I—V) и продукты деления (культ. VI); a_1, a_2 и b_1, b_2 — продукты первого деления; a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_2^2, b_1^1, b_1^2, b_2^1, b_2^2 — продукты второго деления. Жирная черта — продолжительность жизни линий. Цифры над чертой — число генераций за данный отрезок времени. Цифры в скобках в конце черты — дата гибели линии.

раций за данный промежуток времени, а в конце, в скобках, дату смерти инфузорий. В последних трех колонках таблицы даны: вся продолжительность жизни линии, число генераций за этот промежуток и в последней — коэффициент размножения.

Как видно из таблицы, результаты опытов дали довольно пеструю картину как в отношении жизнеспособности, так и в отношении темпов размножения конъюгантов. Из всех культур, кроме VI контрольной, только в одной V по всем линиям инфузории выжили до конца опытов. Во всех же остальных культурах по разным линиям, инфузории оказались не в одинаковой степени жизнеспособными: одни вымерли очень скоро, другие — просуществовали более или менее продолжительное время и только по отдельным линиям продержались до конца опытов.

Наименее жизнеспособной оказалась культура, помещенная на таблице I. С самого начала по всем линиям этой культуры инфузории были мелкие, весьма вялые в своих движениях, плохо питались и очень редко делились.

Еще до конца ноября, прожив всего 14—16 дней и поделившись после расхождения по окончании конъюгации только 4—6 раз, вымерли линии: a_1^1, a_2^1 и a_2^2. По остальным линиям культуры инфузории вымерли в декабре (3—20), прожив, в лучшем случае, (линия b_2^1) 37 дней и разделившись 13 раз. Коэффициент размножения по всем линиям этой культуры был чрезвычайно низкий и колебался в пределах от 0.26 до 0.4. Вторая культура (II) оказалась более жизнеспособной. В начале опыта, в ноябре, здесь только по двум линиям a_2^1 и a_2^2 деление происходило так же вяло и медленно, как и в культуре I-й. Из этих линий одна (a_2^2) вымерла еще до конца ноября (28-го), всего прожив 15 дней и поделившись 6 раз, а другая — a_2^1 дотянула до 10 декабря и вымерла на 8 поколении. По всем остальным линиям сначала деление шло сравнительно энергично и за 17 дней ноября было от 10 — 12 генераций, но уже в начале декабря по линии b_1^2 инфузории стали сильно отставать в темпе деления от остальных линий и поделившись 3 раза, вымерли 12 числа. Линия b_1^1 в начале декабря еще как будто не обнаруживала никаких признаков вырождения, но после 6 делений (от 10 до 15 декабря) прожила, не поделившись ни разу, и вымерла. Что касается остальных линий этой культуры, то здесь, казалось, дело обстояло вполне благополучно; инфузории весь декабрь и почти до конца января имели вполне нормальный вид и хотя значительно отставали в темпе размножения сравнительно с контрольной культурой, не обнаруживали бросающихся в глаза признаков вырождения.

Но в конце января, а по линии b_2^2 и еще раньше, по всем линиям культуры появились признаки депрессии и обнаружилось довольно резкое понижение темпа размножения. Инфузории стали вымирать; первой погибла, уже в январе (26) линия b_2^2, затем 7 февраля — a_1^1, 11-го — a_1^2 и только линия b_2^1 дотянула до 20-го, дав всего за эти 20 дней 8 поколений. В этой культуре, наряду с линиями, рано вымершими, мы имеем линии со сравнительно высокой потенциальной энергией размножения, где инфузории прожили от 74 до 99 дней и дали до 53 поколений. Сравнительно с первой культурой здесь и коэффициент размножения выше и он уже колеблется в пределах (исключая линий a_{2-1} и a_{2-2}) 0.46—0.54.

В третьей культуре, почти с первых дней опыта резко разграничились 2 группы линий: 1-я от эксконъюганта А и 2-я от В. В группе I-й, по всем 4 линиям эксконъюганта А, инфузории как по темпу деления, так и по всему habitus'у ничем не отличались от линий предыдущей (II) культуры. Размножение шло сравнительно с контрольной культурой почти в 2 раза медленнее, инфузории были сравнительно вялы, но признаков депрессии не было, и до конца декабря все обстояло благополучно. Но уже в начале января, в 24-ом поколении по линии a_2^2 обнаружились резкие признаки депрессии и линия вымерла 12-го числа. Затем, в конце того же месяца, погибла линия a_2^1, вскоре за которой та же участь постигла и линию a_1^2, успевшую за 5 дней февраля поделиться лишь 1 раз. Последней вымерла в этой группе культуры линия a_1^1 — 18 февраля, прожив 27 дней и дав 47 генераций.

Что касается 2-й группы, — всех линий эксконъюганта В, — то здесь с самого начала темп размножения инфузорий значительно превосходил темпы линий первой группы и, разве только немногим, отставал от нормального темпа контрольной культуры. Также и по всем остальным видимым признакам инфузории этой группы выглядели совершенно нормальными. В дальнейшем энергия размножения еще более усилилась, сравнившись под конец с контрольной культурой. Все линии этой группы прожили до конца опыта, не обнаруживая до последнего дня никаких признаков вырождения. Насколько можно было судить по опыту протекшего времени, эти линии могли продолжать размножаться еще бесконечно долго и, по всей вероятности, обладали такой же жизнеспособностью, как и линии контрольной культуры. Число поколений, сравнительно с цифрами контрольной культуры, за 138 дней несколько меньше: 104—108 иротив 112—124, так же, как и средний коэффициент 0.76—0.77 против 0.81—0.91, но это незначительное отставание было лишь в начале опыта, а затем обе культуры сравнялись в темпе.

Следующая, IV культура выделилась с самого начала некоторыми специфическими особенностями. Уже с первых дней инфузории по всем линиям этой культуры отличались своей заметно большей величиной не только от инфузорий линий конъюгировавших пар, но и от контрольных. Но, вместе с тем, деление происходило весьма медленно и не только в первое время, но и на протяжении всего опыта, до самого конца, хотя по виду инфузории были вполне здоровы и во всех отношениях выглядели совершенно нормальными.

По всем 5-ти линиям, выжившим до конца, мы видим сравнительно очень бедную продуктивность: всего 83—86 генераций против 112—126 контрольной культуры.

Особенно же заметно отставали в делении инфузорий этих культур в начале опытов (ноябрь-декабрь) и под конец—в марте. С первых чисел января, за исключением двух линий a_1^1 и a_2^2. где размножение попрежнему продолжалось весьма вяло, по всем остальным линиям культуры выявлялась определенная тенденция к более энергичному размножению. Средняя скорость размножения по этим линиям почти сравнялась с контрольными, и весь январь и до конца февраля, казалось, культуры сравнялись. Но в марте, особенно со второй половины, энергия размножения опять резко понизилась и весьма возможно, что если бы опыт продлился еще на некоторое время, все линии вымерли бы. На это указывали, помимо замедления темпа размножения, еще другие признаки приближающейся депрессии: ненормальности в структуре эндоплазмы, вялость движений и угнетенность функций метаболизма. Уже в феврале (11-го) линии a_2^2 и (23-го) a_1^1 выпали из опыта, не переходя в период более энергичного размножения, как остальные, а в марте (17-го) вымерла и линия b_1^2, но это произошло довольно неожиданно, без особых видимых подготовительных изменений. К концу опыта осталось 5 линий, показавших, в общем, весьма низкий коэффициент размножения: 0.60—0.62.

Культура V была единственной, где с первых дней размножение по всем линиям шло наравне с контрольной культурой. Как в отношении энергии размножения, так и по своей жизнеспособности, инфузории этой культуры ничем не отличались от не конъюгировавших, и до конца опыта сохранились все линии одинаково жизнеспособными, и не обнаруживая никаких признаков приближающейся депрессии.

Сравнивая цифры, указывающие число генераций и коэффициент размножения линий этой культуры с цифрами контрольных линий, легко убедиться в том, что разницы почти никакой нет, а если по некоторым

линиям контрольной культуры и существует некоторое превышение, то эта разница находится в пределах индивидуальных колебаний энергии размножения линий одной и той же культуры.

Относительно контрольной культуры можно сказать лишь то, что размножение здесь происходило совершенно нормальным темпом, не отклоняясь от средних цифр размножения основных культур. Сравнительно низкий коэффициент размножения, не достигающий среднего годичного основных культур, находится в зависимости от низкой температуры в период времени, охватывающий эксперимент.

Таким образом, опыт был закончен в конце марта. К этому времени из 40 линий пяти конъюгировавших пар инфузорий погибло 23 линии, что составляет 57.5% всего количества. До конца опыта остались в живых лишь 17 линий, или 42.5%, но если бы опыты были продлены, по всей вероятности, % выживаемости еще более понизился. Вполне жизнеспособными показали себя лишь 12 линий: 8—культуры V и 4 линии эксконъюганта B культуры III. Картина «депрессий», предшествовавшая гибели инфузорий, почти во всех случаях, была очень сходна с той, которую Calkins охарактеризовал, как «физиологическую старость» и которая была нами выше описана. Подвергать «лечению» больных инфузорий стимулированием каким-либо возбудителем не входило в задачу данного опыта, где преследовалась одна цель—сравнить выживаемость и продуктивность инфузорий, подвергшихся половому процессу с не конъюгировавшими, в условиях тождественной внешней обстановки.

Таким образом, результаты этих опытов вполне подтвердили справедливость выводов Jennings. Конъюгация не только не подняла энергии размножения, не «омолодила» культуры, но, как раз наоборот, результатом ее явилась, в большинстве случаев, потеря той устойчивой жизнеспособности, которой обладали инфузории до конъюгации. Смешение ядерных масс при амфимиксисе, нарушившее существующее равновесие, создало новые комбинации, оказавшиеся не только невыгодными для индивида в смысле увеличения жизнеспособности, но для многих инфузорий оно оказалось роковым и привело их к гибели.

Новые вариации, которые очевидно получились в результате конъюгации, может быть и здесь оказались бы положительными и полезными для вида в борьбе за существование, как это показал своими опытами Jennings, но в задачу наших опытов не входило всестороннее исследование последствий конъюгации и каких-либо новых, выгодных, видимых признаков констатировать мы не могли. Разве только можно указать на один такой

случай, где конъюгировавшие инфузории выгодно выделились. Это в культуре IV, где инфузории сравнительно с индивидами других конъюгировавших и контрольных культур отличались своими заметно более крупными размерами, но жизнеспособность, как мы видели выше, и здесь была значительно понижена. Что касается интенсивности размножения, то здесь мы видим в общем резкое понижение темпа размножения и, в лучшем случае, частота деления осталась на нормальном уровне. Таким образом, после более чем 18-летнего периода бесполого размножения, после 7.000 поколений, конъюгация не только не «омолодила» инфузорий, но для большинства конъюгантов она оказалась вредной, сильно понизив жизнеспособность, и ни в одном случае не усилила интенсивности размножения.

В противоречии с этими фактами и с опытами Jennings стоят наблюдения Calkins (12) над размножением инфузории *Uroleptus mobilis*, Beers (6) над размножением и энцистированием у *Didinium nasutum* и др. У этих инфузорий, по наблюдениям авторов, конъюгация повысила энергию размножения. Но едва ли есть основание, при современном состоянии вопроса, утверждать, что стимулом здесь является сам по себе процесс слияния двух различных ядерных масс, а не какой-нибудь другой фактор, привходящий в сложный процесс при явлениях конъюгации.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ О ПОЛИМОРФИЗМЕ БАКТЕРИЙ

Новые формы развития *Bacillus megatherium* de Bary

(*Представлено академиком* Г. А. Надсоном)

В. И. КУДРЯВЦЕВА

Полиморфизм бактерий является в настоящее время одним из самых спорных и запутанных вопросов в микробиологии. Почти в каждом номере специального микробиологического журнала (особенно иностранного) имеются работы, посвященные исследованию морфологической и физиологической изменчивости бактерий. В результате, за последние 10—15 лет, мы видим, что бактерии из самых простых живых существ, имеющих ограниченный круг развития, превратились в существа со сложным циклом развития, включающим в себя даже половой диморфизм (Enderlein, 4) и богатое разнообразие форм (Almquist, 1; Löhnis, 11, 12, 13; Nyberg, 18 и др). Как будет показано дальше, этот вопрос приобретает все больший интерес по мере того, как практика борьбы с заразными болезнями перерастала рамки прежнего мономорфистского учения, в условиях которого она развивалась. Исторически учение мономорфистов уже сыграло свою положительную роль. Введенное в науку знаменитым немецким ботаником Коном и нашедшее подтверждение в методике чистых культур Коха это учение как нельзя лучше способствовало развитию медицинской бактериологии, которой открывались широкие перспективы блестящими опытами Пастера, Коха и др. Молодая, но успешная практика борьбы с заразными болезнями не подтверждала взглядов крайних полиморфистов, утверждавших, что любая бактерия, под влиянием внешних условий, может легко превращаться в другую и что заразной бактерией может быть всякая, находящаяся в окружающей среде. Наоборот, специфичность борьбы (иммунизация, получение сывороток и пр.) доказывала существование специфического возбудителя.

Поэтому, признающая широкий полиморфизм бактерий теория Негели была оставлена и почти забыта. Это было сделано тем более легко, что при помощи методики Коха впоследствии доказали загрязненность культур, с которыми работали некоторые полиморфисты. «Вся новая теория полиморфистов основана на ошибках наблюдения» — так заканчивает критику учения о полиморфизме С. Н. Виноградский.

Отныне все внимание бактериологов сосредоточивается на практических задачах — на установлении связи бактерий с заболеванием. В поиски специфического возбудителя болезни, в изучение его с точки зрения борьбы с ним — вот куда, с большим успехом для дальнейшего развития медицинской бактериологии, были перенесены исследования. Благодаря этому роль медицинской бактериологии была ведущей, и ее прицины были перенесены и на другие ветви микробиологии — техническую и сельскохозяйственную. Таким образом, учение мономорфистов дало толчек к описанию и получению отдельных специфических видов и в других областях. Под эгидой этого учения использовалось всякое даже незначительное отклонение в проявлении физиологических свойств или во внешнем виде (морфология), чтобы установить новый вид.

Такое направление развития микробиологии шло до тех пор, пока не зашло в тупик. Изучение огромного количества новых видов показало, что границы между видами не так резки и определенны как казалось раньше при установлении классификации бактерий, что границы между видами сводятся к границам между вариациями одного и того же вида. Пример с *Bact. coli comm.* очень показателен. Под этим именем описано около 500 разновидностей (Худяков, 26). Bredemann около 20 прежде отдельных видов маслянокислых бактерий объединил в один вид под именем *Bacillus amylobacter*. Виховер многочисленные разновидности уробактерий объединил в один вид *Bacillus probatus*. Несомненно, что при тщательном просмотре других групп бактерий такие примеры будут увеличены. Кроме того, в настоящее время в литературе имеется уже довольно много указаний о сравнительно легкой морфологической и физиологической изменчивости микроорганизмов.

Эти данные открывают перед нами многообещающие возможности искусственного получения и отбора новых полезных в промышленности, сельском хозяйстве и медицине микроорганизмов. На этот вопрос в микробиологии до сих пор не обращалось почти никакого внимания.

С другой стороны, в медицинской бактериологии все больше и больше накапливались наблюдения, указывающие на существование у бактерий

Формы развития *Bacillus megatherium* de Bary
(объяснения см. на стр. 1328)

каких-то новых форм размножения, способных даже проходить через бактериальные фильтры и вызывать заболевание. Особенно, и кажется прежде всего, это относилось к туберкулезу в связи с многочисленными данными о передаче туберкулезного возбудителя in utero плоду. На морфологию бактерий стали обращать большее внимание, так как требовалось как-то объяснить факт существования фильтрующихся форм.

Первая попытка такого объяснения принадлежит Much'у. Этот исследователь в 1907 г. предположил, что в тех случаях, когда в каждом распаде туберкулезных очагов не удается найти туберкулезных палочек, а прививка распада вызывает типичный туберкулез свинок, дело идет об особой форме возбудителя. Такой формой, по его мнению, являются мелкие зернышки, не кислотоупорные, красящиеся по Грамму, и которые постоянно находятся в очагах туберкулезного распада.

В 1914 г. Meirowsky (14) высказал предположение, что зерна Much'а вероятно идентичны с описанными им почками у туберкулезных палочек («Tuberkelbacillenknospen»). Такие же формы им были обнаружены и у целого ряда других бактерий.

Несколько раньше, в 1912 г., Prazmowski (23) описал внутри отмирающих клеток азотобактера мелкие, способные к развитию тельца, возникающие внутри отмирающих форм клеток и названные им регенеративными формами.

В дальнейшем изучение азотобактера сыграло большую роль в оформлении нового взгляда на историю развития бактерий. В 1916 г. Löhnis и Smith (11) опубликовали свое иследование по истории развития этого интересного организма. В клетках азотобактера они также нашли очень мелкие зернышки, будто бы (непосредственного наблюдения за развитием не было) способные к развитию, названные ими гонидиями (то же, что регенеративные формы Prazmowsk'ого), которые иногда заполняли всю клетку — гонидангий. Гонидии превращаются или в регенаритивные тельца, прорастая внутри клетки, или в экзоспоры, выходя на наружную поверхность оболочки.

Кроме того, авторы установили наличие у азотобактера так называемой симплазмы. Это — аморфная живая протоплазматическая масса, образовавшаяся путем слияния нескольких вегетативных клеток после предварительного сбрасывания оболочек. По мнению Löhnis'а и Smith'а в этом проявляется примитивный половой процесс, в результате которого в продукте слияния — в симплазме — зараждаются мелкие тельца — гонидии, способные к дальнейшему превращению в обычные вегетативные клетки.

Эти данные, полученные при исследовании азотобактера, Löhnis (12) в дальнейшем перенес на все бактерии. В 1922 г. он опубликовал свою, достаточно известную теорию по истории развития бактерий, совершенно изменившую прежнее представление о них. По этой теории все бактерии обладают теми же способами размножения как и азотобактер. В доказательство он приводит работы почти всех исследователей, за период с 1838 по 1918 г., когда либо видевших морфологически сходные с описанными им у азотобактера образования. Большинство указанных авторов эти картины описывали как «involюционные» формы, «зернистый распад» клеток (в старых культурах), «детрит», слизь и т. д. По Löhnis'у это было сплошной ошибкой. Кратко, его теория сводилась к следующему. Все бактерии в цикле своего развития проходят две стадии: организованную и неорганизованную. В первой стадии обычные формы кокков, палочек, в известное время образуют в себе мелкие, живые зерна — гонидии, способные проходить через бактериальные фильтры.

Через некоторый промежуток времени наступает вторая стадия развития бактерий — неорганизованная, аморфная — образуется симплазма, о которой речь шла выше. Гонидии, образующиеся в ней, вырастают в обычные вегетативные клетки — кокки, палочки, и цикл начинается снова.

Таким образом, эта в общем внешне стройная морфологическая теория одновременно разрешала и проблему фильтрующихся форм в медицинской микробиологии.

Насколько новое представление о бактериях было своевременно и необходимо, можно судить по тому, что в короткое время оно приобрело широкую популярность. Появилось большое количество работ, в которых описывались в подтверждение теории Löhnis'а морфологически сходные образования у различных бактерий. Так Haag (5) описал их у *Bacill. anthracis*, Mellon (16) у *Bact. diphtheriae* и др., Oesterle и Stahl (21) у *Bac. mycoides*, Petschenko (22) у *Bac. megatherium*, Stoughton (25) у *Bac. malvacearum* и т. д. Уверенность в том, что описываемые зернышки, на которые распадаются бактериальные клетки в старых культурах под влиянием определенных условий, есть действительно жизнеспособные формы, была настолько велика, что удовлетворялись почти одним морфологическим сходством. Однако, ни Löhnis, ни упомянутые авторы непосредственно под микроскопом не наблюдали образования и развития новых форм размножения бактерий. А между тем такое непосредственное и непрерывное наблюдение за развитием только и может решить вопрос о их жизнеспособности. Основным доказательством приписываемой образовавшимся зернышкам

роли было следующее. При посеве на твердые питательные среды «зернистого распада» клеток, «детрита», где микроскопически не обнаруживались споры и здоровые вегетативные клетки, получается хороший рост культуры. Исследования такого посева в пробирке через определенные промежутки времени показывали, что вместо «зернышек» появляются вначале маленькие клеточки, которые затем вырастают в обычные вегетативные формы. Однако, такого доказательства жизнеспособности именно зернышек, как мы увидим ниже, недостаточно. Как бы малы ни были промежутки времени между повторными исследованиями такой развивающейся культуры в пробирке, формы, которые наблюдаются в одной пробе, будут уже не те в другой. Кроме того, в новой пробе прежние формы в процессе развития так изменяются, что по ним невозможно, без известного риска надуманности, представить первоначальные формы, из которых они произошли, что и подтвердилось в наших опытах. Не решает, конечно, вопроса и отношение зернышек к краскам, которое некоторыми авторами приводится как доказательство их жизненности. Интересно отметить, что Haag следил за развитием описываемых им гонидий у *Bac. anthracis* (грамотрицательные формы) в висячих каплях, но отсутствие роста их не помешало автору считать их жизнеспособными. Он предполагает, что причина этого кроется или в условиях среды или в том, что размножению гонидий предшествует различной продолжительности покоящаяся фаза. Непонятно тогда, почему те же гонидии развиваются в пробирке.

Несмотря на очевидную неубедительность всех вышеприведенных доказательств, описание новых форм размножения продолжается и до сего времени. Кроме того, оно без всякой критики вошло даже в учебники по микробиологии, особенно иностранные (A. Janke, R. Lieske и др.).

На этом стоит остановиться, чтобы понять причину такого отношения к фактам, достоверность которых научно еще не доказана.

Всякое новое открытие, в общем, становится необходимым звеном развития соответствующей науки в том случае, если оно диктуется конкретной необходимостью. Проходят иногда многие годы, пока наступившая потребность заставит вспомнить уже сделанное открытие. Таких примеров из истории науки можно привести много. То же самое, в данном случае, проявляется и здесь, но только на обратном примере. Практика борьбы с заразными болезнями давно уже привела к предположению и необходимости поисков каких-то иных, более мелких жизнеспособных форм бактерий. Не хватало только конкретного оформления этих идей. Löhnis первый (и в этом его заслуга) сделал такую попытку оформления в виде всем извест-

ной теории. И она сразу же была принята, несмотря даже на то, что наличие именно этих форм размножения (гонидии, регенеративные тельца, экзоспоры, симплазма) не было убедительно доказано ни у одного вида бактерий.

Лишь немногие исследователи, которые поставили своей целью проверить данные Löhnis'а методом непосредственного наблюдения за развитием, пришли к другим выводам.

Так Rosen (24, 1925) внутри клеток бацилла, выделенного из клубня картофеля, пораженного мозаичной болезнью, а так же у *Bact. typhi, Bac. vulgare, Bacill. mesentericus, Bac. subtilis* и *Proteus vulgaris*, наблюдал частички («particles»), которые по его мнению можно отождествить с гонидиями и репродуктивными зернами, описанными Löhnis'ом. Однако, прямое микроскопическое наблюдение (в висячей капле бульона или конденсационной воды) за ростом и размножением не убедило его в их жизнеспособности. «Ультрафильтрация доказывает, что эти частички живы, другие же способы доказательства дают отрицательный результат» — пишет Rosen в своей работе. В общем, на основании большого опыта он считает, что наблюдаемые частички представляют результат дезинтеграции клеток (аутолиз). Движение этих частичек внутри клеток есть, по его мнению, броуновское движение, которое продолжается и после окраски. (Такое движение зернышек внутри больших клеток — гонидангиев — некоторыми авторами, как Mellon и др., принимается за самопроизвольное движение).

Еще раньше (1923) Bergstrand (2) на *Bac. subtilis* и *Bact. diphtheriae* подверг тщательному исследованию, описанные Löhnis'ом формы — гонидии, гонидангии, регенеративные тельца, и пришел к отрицательным выводам — они не развивались. Он не мог убедиться и в жизнеспособности описанных Mellon'ом маленьких подвижных зернышек, образовавшихся во вздутых концах туберкулезных палочек. Bergstrand заканчивает свое сообщение следующими словами: «Я не отрицаю существования других, сложных форм развития у бактерий.... но напрасно я пытался найти гонидангии или аски даже у холеры, где большие зернистые клетки в старых культурах очень подозрительны и их легко изучать, благодаря их большой величине».

К тем же результатам пришел и Clauberg (9) при исследовании жизнеспособности зернышек распада у *Bact. typhi*. При многочасовом наблюдении их в висячей капле среды они не росли и не размножались. В то же время размножение палочек ясно происходило. И, наконец, Ørskow, (20) про-

веряя жизнеспособность гонидий Almquist'a (экзоспоры по Löhnis'y) методом непосредственного и непрерывного наблюдения, также приходит к выводу об их нежизнеспособности.

Таким образом, и поверочные работы ставили под сомнение наличие новых форм размножения у бактерий.

По предложению акад. Г. А. Надсона я поставил себе целью изучить историю развития *Bac. megatherium* и на нем убедиться в существовании форм, описанных Löhnis'ом и др.

С самого начала в основу исследования был положен метод непосредственного и непрерывного наблюдения за образованием и развитием тех или иных форм в висячей капле. По нашему мнению это единственный метод, который вместе с наблюдениями в пробирке и в естественных природных условиях дает в руки исследователя бесспорный фактический материал. В висячих каплях можно создать любые условия питания, влажности, аэрации, симбиоза и т. д.[1], и нам кажется совершенно неправильным игнорирование этого метода большинством исследователей истории развития микроорганизмов в настоящее время.

Летом 1928 г. мною было выделено восемь штаммов *Bacillus megatherium* из различных мест (слизетечение граба в Крыму), земля, гнилой картофель и т. д. В стареющих культурах этого организма постоянно встречались формы, сходные с теми, которые Löhnis описал как гонидангии, экзоспоры, регенеративные тельца и симплазма.

На их исследовании вначале и было сосредоточено внимание, тем более, что размеры *Bac. megatherium* ($d = 1.5 — 2\,\mu$) делали его прекрасным объектом для изучения вопроса о размножении.

Методика была такова: в висячей капле сусла, щелочного мясопептонного бульона, мясной или пептонной воды, зараженной нужной культурой при большем разведении, отыскивались интересующие образования и наблюдались, не отходя от микроскопа до окончания развития в капле.

Для ускорения этого процесса микроскопический столик с необходимыми предосторожностями (препарат затенялся черной фотографической бумагой) отеплялся электрической лампой, подносимой к самому микроскопу.

[1] Мне удалось, напр., в висячей капле культивировать и следить за развитием *Bac. amylobacter*. Это было достигнуто следующим образом. На покровное стекло наносились две несоединяющиеся между собою капли среды. Одна заражалась каким-либо аэробом (я пользовался *Bac. megatherium*), другая капля — *Bac. amylobacter*. В течении первых двух дней развивается аэроб и поглощает из камеры кислород, после чего в другой капле начинает развиваться *Bac. amylobacter*.

Этим достигалась t° 20 — 25° Ц. Таким образом была проверена жизнеспособность всех вышеуказанных форм Löhnis'a.

1. «Гонидангии»

«Крупные глобулярные формы *Bac. megatherium* могли быть или гонидангии или микроцисты, тогда как «Bacillus-säkchen», найденные Schroen'ом (1890) у этого вида, а также у *Bac. Anthracis*, без сомнения были гонидангии». Так пишет Löhnis (12) о *Bac. megatherium* в своем литературном обзоре. Эти формы, как уже отмечено вначале, действительно встречаются (фиг. 1 *a*, *b*, c) на щ. м. п. и сусло-агаре в старых культурах этого бацилла.

Величина их от $2^1/_2$ — 3 μ до 6 μ в диаметре и больше.

Внутри этих шарообразных клеток видно большое количество зернышек, или неподвижных, разбросанных по всей плазме, или сгруппированных в более бледном центре клетки. В последнем случае они часто находятся в оживленном броуновском движении (табл. I, фиг. 1c). При переносе их в висячую каплю бульона, мясной воды, пептонной воды, сусла, можно наблюдать, что только часть таких клеток, главным образом около $2^1/_2$ — 3 μ в диаметре и с неподвижными зернышками, жизнеспособна и развивается. Постепенно вытягиваясь, эти шарообразные формы принимают вначале вид толстых палочек, затем делятся и приобретают подвижность. Одновременно исчезает зернистость и они превращаются в нормальные, оживленно двигающиеся палочки молодых культур.

Другая часть клеток, главным образом тех, зернышки которых находятся в движении, не развивается (табл. I, фиг. 1c). Они подолгу остаются в таком положении, пока не разрывается оболочка. При разрыве последней плазма принимает бесформенные очертания и постепенно растекается с одновременным освобождением части зернышек. Движение зернышек — несомненно броуновское движение. Оно продолжается и после, в препарате. Дальнейшая судьба этих зернышек меня особенно интересовала, так как, судя по описаниям, они, как впрочем и зернышки предыдущих клеток, принимаются за гонидии. Я много раз наблюдал за их развитием в свежей висячей капле упомянутых сред, но не мог убедиться в том, что они являются гонидиями в смысле Löhnis'a. В продолжение суток или двух, пока длится развитие культуры в капле за счет здоровых вегетативных клеток или спор, зернышки остаются без изменения.

Описанные формы, а также целый ряд других, речь о которых дальше, можно получить не только на агаре (щ.м.п. и солодовом) и в жидких средах

(щ.м.п. бульон и сусло), но также и в висячей капле в условиях эксперимента.

Этим давалась возможность проследить механизм их образования. Правда, здесь они образуются не всегда.

Нужны некоторые определенные условия, чтобы их получить. Одним из таких условий является работа с недавно выделенными из естественной среды культурами. Henrici (6), наблюдавший такие формы у *Bac. megatherium* в пробирке, объясняет эту зависимость тем, что культуры еще «не привыкли» к искусственным средам. И с этим нужно согласиться в том смысле, что наши искусственные среды, а главное «чистые культуры», сильно отличаются от жизни в природе и требуют известной перестройки для приспособления микроорганизмов к новым условиям, во время которой многие индивидуумы погибают.

Кроме того, большое значение для получения этих форм у *Bac. megatherium* имеет, по моим наблюдениям, повышенная влажность субстрата. Было замечено, что на твердых средах образование так назыв. «гонидий» имеется постоянно на свеже сваренном агаре, а именно в нижней части его, а еще лучше в конденсационной воде. В самом верхнем, легко подсыхающем слое скошенного агара этих форм нет. Нет их и на старом подсохшем агаре.

На первый план в этих случаях выступает образование спор, а также инволюционных форм, описание которых будет дано дальше. К тому же все авторы отмечают, что образование «гонидий» идет более успешно в жидких средах. То же самое относится и к висячим каплям. Если развитие *Bac. megatherium* идет в очень тонкой висячей капле, размазанной по покровному стеклу, почти все клетки в конце развития образуют споры. Если же сделать большую каплю, то образование форм, сходных с гонидиями Löhnis'a, в свеже выделенных культурах наступает почти всегда.

Уже в первый день, или во второй при t° 22 — 25° Ц., нормальное (обычное) развитие в такой капле заканчивается. Клетки почти целиком заполняются сильно преломляющими свет зернышками. В некоторых из них, и именно по краям капли, образуются споры.

Движение клеток постепенно замирает. С этого времени в капле начинаются интереснейшие явления, которые приводят к образованию вышеуказанных форм. До сего нормальные палочки с большим количеством зернышек внутри начинают равномерно раздуваться. Получаются различной величины шаровидные клетки до 6 μ в диаметре, имитирующие собой «гонидангии», наполненные зернышками «гонидиями». Вначале тельца неподд-

вижны, но через некоторое время эти зернышки, благодаря, вероятно, разжижению плазмы внутри клеток, начинают проявлять вначале слабое, а потом все усиливающиеся движение.

Часто палочки раздуваются только на одном конце, принимая форму палиц, барабанных палочек, или в середине образуя грушевидные, веретенообразные клетки, наполненные зернышками и т. д. (фиг. 1 — *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*). Haag вместе с Löhnis'ом называют такие формы гонидангиями, «которые освобождают большое количество гонидий» (Haag (5). По моим наблюдениям оболочка таких клеток, а также шаровидных и даже неизмененных по форме, но несколько раздутых, часто разрывается на глазах. Выброшенная плазма или сразу же растекается или принимает вид голого плазматического шарика с зернышком внутри (фиг. 1 *b*).

Последние иногда на глазах сливаются вместе по две, по три, но, в общем, при длительном наблюдении видно, что они постепенно выходят из плазматического шарика (выдавливаются) на поверхность его.

При перенесении всех описанных форм в свежую висячую каплю прорастают только некоторые шарообразные или несколько неправильной формы клетки. «Зернышки» их, представляя из себя запасное питательное вещество, при развитии постепенно потребляются, исчезают. У остальных форм жизнеспособность утрачена. Зернышки этих форм также представляют из себя запасное питательное вещество: гликоген, жир, волютин, а не живые образования. До конца развития культуры эти зернышки остаются без изменения.

Описанные картины раздувания клеток известны в микробиологии со времени А. Фишера как явления плазмоптиза, причина которого заключается в неблагоприятных для развития условиях жизни бактерий. Перенесение микробов из естественных условий на искусственные среды, а также «чистые культуры» несомненно являются неблагоприятными моментами. По-видимому то же явление плазмоптиза наблюдал и Haag (5) у *Bac. anthracis*. Для того, чтобы вызвать образование «гонидий» у этого микроба, к питательной среде он прибавлял пиоцианазу или профильтрованную гнилую жидкость. С той же целью Oesterle и Stahl (21) к питательной среде прибавляли земляной экстракт, соду, поваренную соль, сулему для *Bac. mycoides*. Petschenko (22) получал гонидии у *Bac. megatherium* на картофеле с 2% глицерином. Almquist, чтобы вызвать образование гонидий и экзоспор Löhnis'a (о которых дальше) у различных штаммов группы *Coli-Typhus*, культивировал их при низкой температуре.

Плазмоптиз же является причиной и других форм, не отличимых по внешнему виду от тех, которые описываются как экзоспоры Löhnis'a.

2. «Экзоспоры» Löhnis'a

По Löhnis'у это те же гонидии, но прошедшие через оболочку клетки на ее поверхность. Морфологически они очень характерны и их нельзя смешать ни с чем другим.

Количество экзоспор может быть разным — одна, две и больше. Их описывали многие авторы. Вероятно это те же образования, которые описал Meirowsky (14) у самых различных бактерий. Как гонидии описывает их и Petschenko у *Bac. megatherium*. Экзоспоры сидят или непосредственно на оболочке или соединяются с ней короткой слизистой ножкой. По моим наблюдениям они могут образоваться двояким путем, но причина их образования одна и та же — повышение внутриклеточного давления.

Если оболочка при этих условиях растягивается равномерно, то палочка приобретает форму шара. Если же растягивание оболочки местное, то получаются самые разнообразные формы (фиг. 1). Так же объясняет все разнообразие форм у *Bac. megatherium* и Henrici (6), наблюдавший их в пробирке.

На первый план в таком случае выступает образование «почек» — бледных образований с очень тонкой оболочкой (фиг. 1, *e*, *f*). В зависимости от величины растягиваемого участка оболочки внешнее сходство их с настоящими почками у дрожжей неодинаково. Чем меньше растягиваемый участок оболочки, тем сходство больше (фиг. 1 *e*, *f*).

Оно еще увеличивается, если в «почку», вместе с избытком клеточного сока, выдавливается и плазма с одним-двумя зернышками, как это представлено на фиг. 1-е, табл. I. Не трудно, однако, заметить в той же висячей капле, или при переносе в свежую, что это явление дегенеративное — сильно истонченная оболочка таких «почек» разрывается на глазах и содержимое вытекает вон. Часто тут же видны бахромки разорванной оболочки. Если в «почке» при этом было зернышко, то оно остается приклеенным выдавленной плазмой или непосредственно к оболочке, или на некотором расстоянии, на слизистой плазматической ножке, представляясь в виде экзоспоры. Лопанье «почек», повидимому того же происхождения, наблюдали многие авторы — Prazmowski (23), Hort (7), Ørskow (20), Красильников (10) и др.

«Экзоспоры» могут образоваться и другим путем. В том случае, если оболочка до известного времени противостоит повышающемуся внутриклеточному давлению и не растягивается, можно наблюдать, как отдельные зернышки выдавливаются через оболочку (фиг. 1—*f*). При этом нормальная форма палочки сохраняется.

В висячих каплях видны в этих случаях все переходы прохождения зернышек через оболочку. Описанные два способа образования «экзоспор» отличает также и Stoughton (25, 1929). Он принимает их за настоящие гонидии, хотя и не наблюдал их развития. Я следил за ростом таких «гонидий» многократно при самых различных условиях.

В висячих каплях различных питательных сред (сусло, щ.м.п. бульон, мясная вода, пептонная вода) наблюдались как только что образовавшиеся «экзоспоры», так и экзоспоры из старых культур.

Ни в одном случае образовавшиеся таким путем формы не прорастали.

Плазмоптиз клеток *Bac. megatherium*, наблюдавшийся мною в висячей капле, приводит и к другому, весьма интересному явлению — образованию внутри клеток телец, имеющих некоторое внешнее сходство с «регенеративными тельцами» Löhnis'a.

3. «Регенеративные тельца»

По Löhnis'у это маленькие клеточки, выросшие из гонидий внутри материнской клетки. Я тоже наблюдал сходные образования по одному, по два в клетке.

Происхождение их, по моим наблюдениям, следующее. После вытекания избытка клеточного сока при лопаньи «почек», оставшаяся плазма внутри несколько опустевшей клетки принимает вид одного или двух шариков (как и при выбрасывании плазмы наружу — см. выше), очень напоминающих по виду маленькие клеточки внутри материнской клетки. Они встречаются довольно редко. Я ни разу не видел при переносе их в свежие висячие капли, чтобы эти формы развивались.

При этом видно было, что старая «материнская» оболочка их разрушалась, и протоплазматические шарики выходили наружу. Дальнейшая их судьба была та же, что и протоплазматических голых шаров, выброшенных при разрыве оболочки клетки и описанных выше. Это окончательно убедило меня в правильности сделанного заключения.

Почти все описанные формы наблюдал и Henrici (6) в старых культурах *Bac. megatherium* в пробирке. Явление это он охарактеризовал как «полиморфизм смертной фазы» и пришел к выводу, что это мертвые образования. Критерием жизнеспособности их у Henrici был счет клеток на свежих агаровых пластинках и счет выросших колоний, а также окраска при помощи конгорот.

4. «Инволюционные формы»

Однако, разнообразие отклоняющихся от нормы форм у бактерий описанными картинами плазмоптиза далеко не исчерпывается. Чрезвычайно разнообразны они в старых культурах *Bac. megatherium*, особенно на сахарных средах. Их образование, как известно, приурочивается к стареющим культурам, с ухудшенными условиями питания. У этого бацилла отклоняющиеся формы встречаются уже к концу второго или на третий день развития, когда в среде произошло некоторое накопление ядовитых продуктов обмена, и когда основная часть питательных веществ в верхних слоях агара использована. Большое количество палочек к этому времени образует споры. Не образовавшие же споры палочки, набитые зернышками запасных питательных веществ, превращаются в формы самых причудливых очертаний. Фиг. 2 таблицы 1 далеко не исчерпывает их разнообразия. Встречаются большие шаровидные, грушевидные, веретенообразные, четковидные и просто неправильной формы клетки с длинными, часто извитыми, заостренными концами. Все они встречаются вместе с уже описанными формами плазмоптиза. Интересно отметить влияние влажности на появление тех или иных форм. При большой влажности среды (свежий агар с конденсационной водой) на первый план выступают все вышеописанные явления — разбухание с последующим ложным почкованием, образованием «экзоспор», «регенеративных телец» — словом наступают дегенеративные явления, которые обычно кончаются разрывом оболочки в том или ином виде. На постоявшем и несколько подсохшем агаре (без конденсационной воды) в стареющих культурах так же происходит разбухание клеток, но при этом дело не доходит до разрыва оболочки. Получается такое впечатление, что явление плазмоптиза здесь ограничивается только первой фазой — разбуханием оболочки без разрыва и потому не ведущим к смерти клеток. Они остаются жизнеспособными и даже размножаются на том же субстрате, но несколько иначе, чем нормальные палочки, из которых они произошли. Первой особенностью размножения таких раздутых форм является то, что прежняя закономерность в направлении плоскостей деления утрачивается. Образование перегородок идет без всякого порядка как у стафилококков (фиг. 2). Это можно было наблюдать непосредственно при пересеве в свежую висячую каплю (фиг. 5). Кроме того, клетки сразу делятся на 3 — 4 — 5 и больше частей (фиг. 2 *a*, *b*). И наконец, третья особенность размножения состоит в том, что в результате такого множественного деления клеток образуются неравные по величине части.

Получающиеся таким путем клеточки в большинстве так же жизнеспособны. За это говорит то, что уже в старых культурах в некоторых из них образуются споры (фиг. 2,а). Кроме того, жизнеспособность их проверялась и непосредственным наблюдением в свежей висячей капле. На фиг. 3 изображено последовательное развитие такой клетки, имеющей 6 перегородок. Нужно, однако, заметить, что некоторые части клеток не прорастают (фиг. 3 и 4). Очень возможно, что рост при посеве материала из старых культур, состоящего из «зернистого распада» клеток, «детрита», о чем шла речь выше, зависел именно от наличия этих мелких, неправильной формы клеточек, а не от зернышек, принимаемых за «гонидии».

Раздутые круглые формы с изменившимися плоскостями деления наблюдал также А. Меуег (15) в старых культурах *Bac. cohaerens, Bac. ellenbachensis* и у *Bac. ruminatus*. Он называет их хламидоспорами, а Löhnis подобные формы у *Bac. megatherium*, описанные de Bary, называет микроцистами. По моему мнению у *Bac. megatherium* они вообще не являются покоющимися формами, так как развиваются дальше при тех же условиях, при которых образовались (в той же культуре). При наблюдении более старых культур (5—6-дневных) видно, что некоторые раздутые формы постепенно вытягиваются, часто образуют длинные заостренные концы, местами вздуваются, давая веретенообразные, грушевидные и др. формы. Одновременно количество зернышек в них постепенно уменьшается и наконец совсем исчезает. Плазма при этом становится бледной, как будто разжиженной, с полным отсутствием вакуоль (фиг. 4). Чтобы выяснить жизнеспособность описанных involюционных форм при различных стадиях изменения, они одна за другой исследовались в свежей висячей капле под микроскопом. В общем оказалось, что способность к развитию и превращению в обычные формы палочек остается у них приблизительно до тех пор, пока имеются в клетке зернышки запасных питательных веществ, или пока плазма не приняла еще характерного в таких случаях вида, отмеченного выше — бледная, как бы разжиженная. Однако, это только внешние, ориентировочные признаки. В каждом отдельном случае вопрос решает, конечно, непосредственное наблюдение за развитием тех или иных форм в висячих каплях.

Переходя пока к предварительной оценке полученных результатов, кратко остановлюсь на истории вопроса об involюционных формах.

В последнее время учение об этих формах претерпевает коренное изменение. Введенное в науку Негели, оно объясняло involюционные формы как «ненормальные болезненные стадии или состояния, которые,

повидимому, совершенно не способны к делению или образованию спор и представляют собой очевидно регрессивную стадию или застой в развитии, вызванный дурным питанием» (Цопф. Дробянки-бактерии, 1884). Некоторые авторы впоследствии видели в этих формах проявление атавизма и на этом пытались установить родство бактерий с другими организмами (с грибами — Ferran, со *Sporozoa* — Dowdeswell).

Однако, взгляд на инволюционные формы как на болезненные, дегенеративные формы, оставался до последнего времени господствующим и занимал существенное место в общей теории мономорфизма. Все отклонения от обычных форм бактерий рассматривались как инволюционные формы и на изучение их не обращалось почти никакого внимания. Со времени Löhnis'a отношение к инволюционным формам изменилось. Воскрешая взгляды старых полиморфистов (Buchner и др.), он считает инволюционные формы нормальными формами развития бактерий. Кроме того, Löhnis приписывает им способность образовывать в себе новые зачатки, служащие для размножения — «гонидии», «регенеративные тельца», «экзоспоры».

Исследование мною инволюционных форм у *Bac. megatherium* показало, что на агаровых средах они появляются вместе со спорообразованием, следовательно тогда, когда условия роста становятся неблагоприятными. В жидких средах *Bac. megatherium* вовсе не образует спор, и культуры погибают быстрее при описанных выше явлениях плазмоптиза. Причина этому, как мне кажется, лежит в том, что хотя в этих условиях питание бактерий и более благоприятно, но это же ведет и к наибольшему накоплению ядовитых продуктов обмена. Кроме того, лучшие условия всасывания в жидких средах дают возможность и наиболее действительного и губительного влияния продуктов обмена на вегетативные формы. Поэтому на первый план здесь выступает плазмоптиз, ведущий к более быстрой гибели культуры. При меньшей влажности отравление более медленное и менее сильное. Бактерии долго размножаются и в процессе борьбы с неблагоприятными условиями вырабатывают новые приспособительные формы, отвечающие новым условиям («Anpassungsformen» Prazmowski). Таким приспособлением у *Bac. megatherium* является, по моему мнению, множественное деление разбухших клеток, которое уже одно, несомненно, улучшает процессы обмена. Гигантские, неразделившиеся клетки быстро теряют жизнеспособность, так как выход даже собственных продуктов обмена затруднен вследствие уменьшения поверхности клетки по сравнению с объемом. После деления разбухших клеток в некоторых

из частей образуются споры. Но и не образовавшие спор клеточки также долго остаются жизнеспособными, быть может приобретая новые свойства, отвечающие новым условиям.

Пути приспособления бактерий, повидимому, могут быть самыми разнообразными. Prazmowski, а затем Löhnis, как уже упоминалось, описали регенеративные формы у азотобактера внутри отмирающих инволюционных клеток. Красильников (1931) проследил их развитие в висячей капле и тем окончательно доказал их существование у азотобактера. В образовании регенеративных форм Prazmowski видел род сохранения жизни при условиях, губительно действующих на бактериальный организм. Вполне возможно, что у некоторых бактерий в процессе приспособления образуются и гонидии, как проявление регенерации отдельных участков плазмы в умирающей бактериальной клетке, как это показала напр. Жолкевич (28) в 1926 г. при изучении *Bac. crystallino-violaceum*.

Все это по новому ставит вопрос об инволюционных формах у бактерий. Несомненно, что они являются выражением ответной реакции бактериального организма на неблагоприятные условия, а не «нормальными» формами развития, как это предполагал Löhnis, а еще раньше Buchner и др. Уже одно появление их после или одновременнно с образованием спор говорит за это. Кроме того, огромное их количество, как было уже указано, погибает. И только относительно немногие на пороге смерти приспособляются к новым условиям, приобретая новые свойства в борьбе за сохранение жизни. Именно с этой точки зрения инволюционные формы должны быть подвергнуты самому тщательному исследованию. Мы нисколько не подвинемся вперед в деле изучения бактерий, если вместе с мономорфистами будем считать их только «явно патологическими состояниями» и на этом основании отбрасывать и не вводить их в круг нашего исследования. Наоборот, изучение их, особенно изучение их биологии при самых различных условиях (инволюционные формы Nägeli, гетероморфные бактерии Гамалея, «Abweichungsformen» Janke и т. д.) откроет новые пути более широкого использования бактерий (при закреплении новых полезных для человека свойств) и более рационально поставленной борьбы (напр., с патогенными видами).

Уже сейчас, по вопросу о фильтрующихся формах у бактерий чрезвычайно важно было бы установить, какова минимальная величина жизнеспособных клеточек, получающихся в результате множественного и неравномерного дробления раздутых инволюционных форм. Это, специально по отношению к *Bac. megatherium*, не было мною прослежено, так как в про-

цессе работы мне удалось открыть новые явления, изучение которых и отвлекло меня в сторону.

Прежде чем перейти к их описанию коротко остановлюсь на так называемой «симплазме».

5. Симплазма

В старых культурах *Bac. megatherium* на агаре, или лучше в бульоне и сусле, постоянно встречаются образования, сходные с теми, что Löhnis описал под именем «симплазмы». Это разной величины бесформенные плазматические комки с вкрапленными внутри и находящимися на поверхности зернышками, иногда обрывками оболочек и даже целыми клеточками (табл. I, фиг. 1 *h*). Рядом с такими слизистыми скоплениями в препарате можно видеть отдельные клетки, пары клеток и больше со сбрасываемыми или сброшенными оболочками. Это рыхлая, голая, растекающаяся плазма скопление которой и дает «симплазму».

В препаратах из старой культуры на солодовном агаре иногда видны также целые цепочки клеток со слизистыми чехлами, произошедшими от ослизнения оболочек. Приставшие к слизи зернышки запасных питательных веществ из соседних разрушенных клеток, а также мелкие клеточки дают, иной раз, полное впечатление «симплазмы» с уже развившимися внутри клеточками. Я несколько раз следил за развитием «симплазмы» в висячих каплях упомянутых сред и ни разу не видел превращения зернышек — «гонидий», «регенеративных телец» в вегетитивные клетки. Точно так же не видел я их новообразования, как это предполагает Löhnis. Если развитие клеток в этом слизистом кусочке и бывало иногда, то оно было исключительно за счет живых клеток, бывших здесь раньше (фиг. 1 *h*). Bergstrand (2) о симплазме в культуре *Bac. diphtheriae* пишет: «Эта масса всегда содержит клетки, которые способны расти». Я думаю, что «симплазма» и у *Bac. megatherium* представляет собой либо скопление мертвых, сбросивших оболочки клеток, как это описывает и Красильников у азотобактера, либо слизистую агломерацию клеток по типу зооглеи, как наблюдал также Bergstrand у *Bact. diphtheriae*.

Таким образом мне не удалось подтвердить существование у *Bac. megatherium* «спмплазмы» в смысле Löhnis'а, так же, как и его гонидий, экзоспор и регенеративных телец.

Перехожу теперь к описанию наблюдений, которые были сделаны на живых, нормально развивающихся культурах *Bac. megatherium* в висячих каплях, а затем и на твердых средах в пробирке.

6. Почкование у *Bac. megatherium*

При заражении в висячих каплях среды культурой *Bac. megatherium* наблюдается следующее. Споры на глазах теряют свой блеск, одновременно разбухая. Наружная оболочка их лопается, и молодой росток, вытягиваясь, превращается в нормальную палочку. Затем появляется поперечная перегородка, которая делит ее на 2 части. После одного-двух делений палочки приобретают подвижность и разбегаются. Палочки, не образовавшие споры, (здоровые вегетативные клетки, наполненные зернышками запасного питательного вещества) так же развиваются. Зернышки, постепенно уменьшаясь, исчезают. Клетка вытягивается, делится и как обычно приобретает подвижность. В зависимости от величины висячей капли и камеры, а также от густоты посева, к концу первых суток, или несколько позднее, развитие останавливается — деление замедляется, снова появляются зернышки запасного питательного вещества. В части клеток начинается процесс образования спор, который, в общем, идет по типу сжатия (контрактации) плазмы в одно все более и более резко преломляющее свет тельце — спору. Движение останавливается. Так происходит обычное развитие. Однако мною было замечено, что этой обычной и в общем известной картиной развитие у *Bac. megatherium* не ограничивается. Именно, в 20-часовой культуре (в висячей капле сусла) впервые была замечена подвижная клетка с маленькой почкой, соединенной открытым канальцем с материнской клеткой. Эта клетка была прослежена дальше. В течение двух часов при 20°Ц. каналец закрылся и образовалась настоящая, овальной формы, почка с тремя зернышками внутри. Подвижность материнской клетки, ее рост и два деления за время образования почки ясно показывали, что в данном случае имеется настоящий репродуктивный процесс, а не результат дегенерации. С этого времени все внимание было сосредоточено на нормально развивающихся формах, что дало возможность наблюдать целый ряд новых и интересных явлений. Так удалось установить, что процесс настоящего почкования действительно присущ этому бациллу, хотя и встречается довольно редко. Часами, иногда, приходилось искать клетки с начинающимся процессом почкования, чтобы проследить его полностью.

В общем клетки с почками наблюдались много раз, но весь процесс почкования, от начала до конца, был прослежен только три раза. Заранее никак нельзя было узнать, даст ли наблюдаемая клетка почку или, как обычно, разделится пополам. Первый раз это удалось при следующих обстоятельствах (фиг. 6). Я наблюдал за тремя растущими, долго неподвижными клетками, с другой целью. В одной из них, с некоторым количеством мелких зернышек, около поперечной перегородки, сбоку появилось голубоватое зернышко несколько больших размеров, чем другие, у самой оболочки. Затем в этом месте началось выпячивание оболочки вместе с зернышком. Через некоторое время развилась настоящая почка с замеченным ранее зернышком внутри. Весь процесс длился около 4 часов. За это время почкующаяся клетка одновременно два раза разделилась (фиг. 6). Этот же процесс повторился и еще в двух случаях наблюдения, причем один раз при прорастании «инволюционной» формы (фиг. 5). Размеры почек были около 1 μ в длину, 0.5 μ в ширину. Чтобы лишний раз убедиться в том, что образовавшиеся почки жизнеспособны, их развитие наблюдалось в свежей висячей капле (фиг. 7 и 5). Действительно почка росла, и только через 4—5 час. наступало первое деление.

Настоящее почкование у бактерий по типу дрожжей наблюдал Красильников у азотобактера, но оно не похоже на описываемое почкование у *Bac. megatherium*. Большое сходство последнее имеет с тем процессом, который автор описывает как проникновение регенеративных телец через оболочку клетки азотобактера. Было бы интересно вновь проследить на азотобактере — выходит ли это тельце как уже сформировавшаяся внутри материнского организма клеточка, или здесь происходит тоже почкование, но выпячивание оболочки не было замечено по причине малых размеров почки.

7. Новый тип деления бактериальных клеток

Почти одновременно с почкованием были обнаружены и другие интересные формы размножения клеток у *Bac. megatherium*, встречающиеся более часто. Между подвижными парами клеток *B. megatherium* замечены были серповидной формы тельца с заостренными концами (фиг. 8). Величина их вариировала от 0.3—0.5 $\mu \times 0.1$—0.2 μ до 2—3 $\mu \times 0.8$—1 μ. Иногда встречалось такое тельце только у одной нормальной подвижной палочки; вторая или отрывалась и убегала на глазах, или отделялась

раньше (фиг. 8 *b*). Через некоторое время отрывалась и убегала последняя палочка. Тельце, в таком случае, оставалось лежать неподвижным в поле зрения. Это облегчало наблюдение за его дальнейшей судьбой. Тельце начинало расти, заостренные концы округлялись и оно постепенно превращалось в обычную, часто несколько изогнутую палочку. Затем появлялась нормальная перегородка, палочка делилась и приобретала подвижность (фиг. 9). Весь этот процесс обычно длится 2—4 часа (в зависимости от величины тельца и от того, начинается ли развитие культуры в висячей капле или подходит к концу, т. е. благоприятны ли условия развития или нет). Было совершенно ясно, что серповидной формы тельце жизнеспособно, но его происхождение долго оставалось непонятным. Через некоторое время замечены были клетки, необычные, подвижные и опоясанные по средине кругом или наполовину тонким, несколько косо идущим валиком (фиг. 8 *c*). Если валик охватывал клетку только наполовину, то при одном положении подвижной клетки он казался боковой почкой (фиг. 8), при другом — пояском во всю ширину клетки (фиг, 8 *c*). В результате наблюдения за дальнейшим развитием таких клеток оказалось, что валик, или поясок, есть стадия развития того же серповидного тельца. В месте валика клетка оказывается всегда разделившейся. Клетки-сестры, постепенно расходясь, развертывают валик из положения поперечного в продольное, и тогда перед глазами представляется уже описанное выше серповидное тельце между двумя клетками. После ряда таких наблюдений нельзя было сомневаться в том, что образовавшееся тельце как-то связано с делением клеток. Сравнительно нечастое образование валиков или серповидных телец в культуре долго мешало проследить этот процесс от начала до конца.

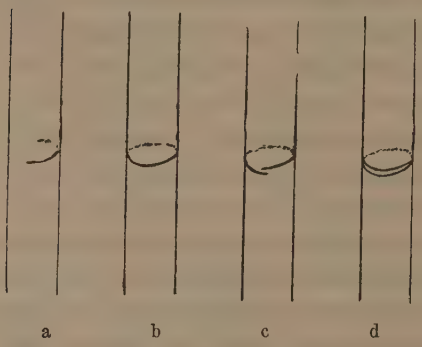
Все же постепенно выяснилось, что в случае образования «серпов», происходит чрезвычайно интересный тип деления бактериальной клетки не на две, как это обычно бывает, а одновременно на три части. При делении сразу закладывается под некоторым, в отдельных случаях разным, углом, две перегородки. Исходя из многих повторных наблюдений этого процесса у *Bac. megatherium* (а после и у других видов), я думаю, что механизм его следующий.[1] Закладывание будущей перегородки начинается еле заметным утолщением оболочки в месте деления с внутренней стороны. Утолщение происходит не одновременно по всей окружности, а начинается где-нибудь в одной точке и распространяется отсюда в обе стороны по окружности

[1] Небольшие размеры объекта заставляют отнестись к описанию механизма нового деления как к гипотезе.

до встречи и смыкания на другой стороне клетки, как указано на схеме (Фиг. 1, a, b).

Одновременно по линии утолщения начинается погружение оболочки внутрь и перешнурование одной клетки на две, как это описано Г. А. Надсоном (17) у *Achromatium oxaliferum*. Так происходит обычное деление. В описываемом же случае процес идет несколько иначе. Начавшись в одной точке, утолщение оболочки идет в обе стороны не строго перпендикулярно к длиной оси палочки, а несколько косо, и поэтому встреча утолщений в обычном месте на другой стороне клетки не происходит (c).

Если, несмотря на это, утолщения продолжаются дальше, что в большенстве случаев и бывает, то могут быть четыре исхода.



Фиг. 1.

Первый исход. Одновременное погружение оболочки может выправить направление линий утолщения, и последние после отклонения пойдут в перпендикулярном к длине палочки направлении. Тогда они обязательно пересекутся в двух местах, как это видно на схеме (d). Так же, как косое вначале и исправленное затем движение ножа во время перерезывания палки, или еще лучше арбуза, обязательно вырежет серповидный ломтик, точно так же в результате описываемого движения будет вырезано серповидное тельце. Таким образом, палочка сразу делится на 3 неодинаковых по форме и величине части. Минимальные размеры серповидных телец, которые были еще способны к развитию, по моим наблюдениям, равны 0.5—0.6μ × 0.3—0.4μ, т. е. их объем был в 200—300 раз меньше объема среднего размера клеток *Bac. megatherium* (6 μ × 1.5 μ). Это чрезвычайно важное обстоятельство, но о нем позднее. Более мелкие частицы, вырезанные при этом делении, роста в висячей капле не давали.

Второй исход. Погружение оболочки не выправит направления линий утолщения. Тогда образование перегородки пойдет вслед за ними по винтовой линии к одному и другому концу палочки. И это действительно происходит. В препарате всегда имеются клетки, где валик несколько раз спирально опоясывает палочку (Фиг. 8). В большинстве случаев выправление плоскости деления все-таки происходит через несколько оборотов и на одном

и на другом конце. Клетка в таком случае делится также на три части: две обычных, несколько укороченных палочки и третья — спирально закрученная (фиг. 8 *f*). Наблюдения за спирально закрученными образованиями в висячей капле показали, что они жизнеспособны — они растут, делятся и принимают вид обычных палочек.

Третий исход. Реже, но все же встречаются случаи, когда выправление плоскости деления происходит только на одном конце клетки, и только в этом месте заканчивается деление. На другом же конце серповидное тельце или спирально закрученное образование остается соединенным канальцем с материнской клеткой (фиг. 8 *g*).

Наконец четвертый исход, когда деление не заканчивается вовсе. Механизм его одинаков с предыдущим: то же, первоначально косое заложение оболочки и расхождение линий утолщения на другой стороне клетки. В отличие от предыдущих случаев дальнейшее распространение утолщения прекращается. Одновременно погружение оболочки и, следовательно, образование перегородки будет только в месте утолщений. Остальная часть клетки перешнурована не будет. Таким образом, между двумя клетками останется незакрытым узкий проток, канал, соединяющий эти клетки. Вначале мало заметный, с ростом клеток он удлиняется и делается ясно видным. (фиг. 8, *h*, *i*). В этом случае он сильно напоминает копуляционный канал у некоторых дрожжей (*Zygosaccharomyces*).

Такие соединения бактериальных клеток при помощи канала, являющегося результатом неполного, незаконченного деления, описывались многими авторами. Löhnis трактует это явление как выражение полового процесса у бактерий, называя его конъюнкцией. Однако в его работах нет доказательств того, что в данном случае дело идет о вторичном соединении клеток. Bergstrand на *Bact. diphtheriae*, а затем Красильников на азотобактере показали, что здесь лишь внешнее сходство с половым процессом дрожжей. На самом деле это не вторичное соединение, а результат неполного деления клеток; то же самое мы видели и у *Bac. megatherium*.

После того как был установлен новый тип деления у этого вида, встречающийся в общем довольно часто наряду с обычным, естественно встали и другие вопросы. Прежде всего необходимо было выяснить, присущ ли этот тип деления другим бактериям, или он встречается только у *B. megatherium*. Было взято еще, в общем, шесть недавно выделенных мною видов. При тех же условиях исследования описанный тип деления был обнаружен и у них. Пока только один вид, выделенный из земляники в 1929 г. доста-

точно хорошо изучен, причем здесь это явление наблюдается много чаще, чем у *B. megatherium*.[1]

У остальных пяти видов (среди них *Bacillus amylobacter* и 4 вида, систематическое положение коих еще не установлено) сделаны пока лишь общие наблюдения, доказывающие, однако, наличие того же типа деления с образованиями мелких серповидных телец, способных к дальнейшему развитию. Работа с ними продолжается.

То, что деление бактериальной клетки сразу на три части до сих пор не было известно, говорит за существование каких-то определенных условий, при которых оно совершается. Нужно было изучить эти условия. Как уже отмечено, это явление первоначально наблюдалось в висячей капле сусла. После оно было обнаружено вообще на солодовых средах (желатина, агар) и в пробирке. Поиски тех же форм на щелочных мясопептонных средах не увенчались успехом.

Были испробованы затем различные питательные среды, и оказалось, что основное значение, для появления нового типа деления, имеет концентрация водородных ионов. Если в мясопептонных средах (бульон, желатина, агар) pH ниже 7, то деление с образованием серповидных телец наступает в таком же приблизительно соотношении с обычным делением как и на солодовых средах. Если pH больше 7 — наблюдалось только обычное деление. Это относится как к мясному бульону, так и пептонной воде в отдельности. Прибавление к щелочным средам сахаров на первый взгляд как будто меняло дело: описанное деление наступало в таком же соотношении и здесь (опыты были поставлены с 5% глюкозой, мальтозой и сахарозой в отдельности). Оказалось, однако, что влияние сахаров здесь косвенное. *Bac. megatherium* обладает способностью разлагать указанные сахара с образованием кислот. Последние не только нейтрализуют щелочность субстрата, но и меняют реакцию среды на кислую. Это свойство разлагать сахара с образованием кислоты эффектно проявляется при росте культуры на среде Барзикова (1% нутрозы + ½% NaCl + 1% какого-либо сахара). Из пяти прибавленных сахаров (глюкоза, мальтоза, сахароза, лактоза и галактоза) все оказались разложимы с образованием кислоты. Уже в течение суток синий цвет среды Барзикова изменялся в красный. Таким образом, влияние сахаров на образование серповидных телец сводится также к влиянию кислой реакции.

Другие условия изучены не были.

[1] Описание этого вида будет дано в отдельном сообщении.

Из того, что описанный тип деления у *Bac. megatherium* не является исключением, а встречается и у других шести исследованных в этом отношении видов, можно думать, что это явление распространенное среди бактерий.

Чрезвычайно важно, что при этом делении образуются мельчайшие жизнеспособные формы, объем которых в 200—300 раз меньше среднего объема палочек. Это заставляет обратить на них внимание, особенно медицинских бактериологов, так как возможно, что «фильтрующие формы», «осколки клеток», именно этого происхождения. С этой точки зрения большой интерес представляет более детальное изучение условий наступления описанного деления. Нельзя, напр., исключить возможность того, что именно такие условия появляются в заболевшем организме животного или человека, которые влекут за собой появление описанных мелких форм.

Кроме того, в связи с образованием почек и переходом «голубоватого тельца» из материнской клетки в почку, как описано выше, необходимо было бы обратить внимание на цитологию бактерий, что возможно приблизит нас к решению еще до сего времени спорного вопроса о ядре.

На основании сделанных наблюдений имеется возможность сделать следующие выводы:

1) Описанные Löhnis'ом и др. авторами формы размножения бактерий как гонидангии, гонидии, экзоспоры и симплазма не подтверждаются. Зернышки, имеющиеся в клетках старых культур, представляют собой запасное питательное вещество (жир, гликоген, метахроматические зерна), а не живые образования. Движение их внутри некоторых раздутых клеток есть броуновское движение и является следствием ауголитических процессов в мертвых клетках. Симплазма не что иное, как скопление голой плазмы мертвых клеток, в которой случайно, извне, могут быть вкраплены и здоровые бактерии.

2) Раздувание клеток наступает при неблагоприятных условиях жизни бактерий в стареющих культурах, причем все разнообразные формы, особенно в жидких средах, зависят от неравномерного растягивания оболочки при повышающемся внутриклеточном давлении. На твердых средах то же явление выражено слабее. Здесь многие клетки долго остаются жизнеспособными, приспособляясь к неблагоприятным условиям. Это приспособление морфологически выражается в описанном множественном делении (на 3—4 и больше частей), что несомненно улучшает процессы обмена веществ. Неразделившиеся клетки принимают самые причудливые формы и быстро погибают.

3) Рост при пересеве такой культуры, состоящей из «клеточного распада», «детрита» (Löhnis и др.), обусловлен именно этими мелкими клеточками, которые не были замечены авторами. Наличие «гонидий», за счет которых будто бы в этих случаях развивается культура, у *Bac. megatherium* не доказано.

4) У *Bact. megatherium*, хотя и редко, наблюдается настоящее почкование по типу дрожжей.

5) На средах, pH которых меньше 7, наблюдается новый тип деления бактериальной клетки одновременно на 3 части. Добавочная третья часть имеет вид серповидного тельца, объем которого в 200—300 раз меньше средней величины палочек. То же наблюдается и на щелочных средах (щелочной мясопептонный агар и бульон) в присутствии сахара, если данный сахар разлагается микробом с образованием кислоты, изменяющей щелочную реакцию на кислую. Описываемый тип деления, кроме *Bac. megatherium*, встречается и у других 5 изучаемых еще видов.

В заключение приношу глубокую благодарность акад. Г. А. Надсону за постоянное руководство работой.

Ботаническая лаборатория Ленинградского Мед. Института и Микробиологическая лаборатория Академии Наук СССР. 1932.

ЛИТЕРАТУРА

1. Almquist, E. Studien über das Verhalten einiger pat. Mikroorganismen bei niedriger Temperatur. Cbl. f. Bact., I Abt., Orig. Bd. 48.
2. Bergstrand, H. Further Studies on the Morphol. of Bacteria. Journ of Bact., vol. VIII, № 4, 1923.
3. Де-Бари, А. Лекция о бактериях. 1886.
4. Enderlein. Bacterien-Cyklogenie. 1925.
5. Haag, F. Der Milzbrandbacillus, seine Kreisaufformen und Varietäten Archiv. f. Hyg., Bd. 98, H. 6—7—8, 1927.
6. Henrici, A. Morpholog. variation and the rate of growth of Bacteria. Proc. Intern. Congr. plant Sciences, Ithaca, vol. 1, 1929.
7. Hort. E. The life history of Bacteria. British Medic. Journ., № 1, 1917.
8. Гамалея, Н. Ф. Основы общей бактериологии. 1899.
9. Clauberg, K. Untersuchungen zur Frage der Zyklogenie des Typhus-bacillus. Cbl. f. Bact., I Abt., Orig. Bd. 105, H. 4/5.
10. Красильников, Н. А. История развития *Azotobacter*. Микробиол. журн., т. XII, вып. I, 1931.
11. Löhnis, F. и Smith, R. Life cycles of the Bacteria. Journ. of Agric. Res., vol. VI, № 18, 1916.
12. —— Studies upon the life cycles of the Bacteria. Mem. nat. Acad. of sci., vol XVI, 1922.
13. —— Zur Morphologie und Biologie der Bacteria. Cbl. f. Bact., II Abt., Bd 56, 1912.
14. Meirowsky, E. Studien über die Fortpflanzung von Bacterien, Spirillen und Spirochäten. Berlin, 1914.

15. Meyer, A. Über Chlamydosporen und über sich mit Iod blau färbenden Zellmembranen bei den Bacterien. Ber. deutsch. bot. Ges., Bd. XIX, 1901.
16. Mellon, R. Studies in Microbic heredity. Journ. of. Bact., vol. XI, 1926.
17. Надсон, Г. А. и Вислоух, С. М. Строение и жизнь гигантской бактерии *Achromatium oxaliferum* Schew. Изв. Гл. бот. сада, XXII, прилож. I, 1923.
18. Nyberg. Morphologie du *Bacillus mycoides*. Commentationes biologicae, III, № 3, 1928.
19. Омелянский. В. Л. Основы Микробиологии. 1931.
20. Orskow, I. Eine Morphologische Untersuch. über einen Paratyphus B Bacillustsamm. Ztschr. f. Hyg., Bd. 104, H. 3.
21. Oesterle, P. und. Stahl. C. Untersuchungen über den Fermenwechsel und die Entwicklungsformen bei *Bac. mycoides*. Cbl. f. Bact., II Abt., Bd. 79, 1929.
22. Petschenko, B. Wenig bekannte und neue Wachstumsformen des *Bac. megatherium* (De Bary). Bull. intern. de l'Acad. polonaise des sciences et des lettres, № 2—7, B-1 1929.
23. Prazmowski, A. Der heutige Stand unseres Wissens von Leben und von den Wirkungen des *Azotobacter Chroococcum*. Bull intern. de l'Acad. des sciences de Cracove, 1912.
24. Rosen, H. Variations within a bacterial species — 1 Morphologic. variations. Mycologia, vol. XX, № 5, 1925.
25. Stoughton R. The Morphology and Cytology of *Bac. malvacearum*. Proc. R. Soc., London «B», t. CV, 1929.
26. Худяков Сельско-хозяйственная микробиология 1926.
27. Цопф, В. Дробянки-бактерии. 1884.
28. Жолкевич, А. Я. К вопросу о влиянии лучей Рентгена на бактерии. Вестн. Рентгенологии и радиологии, т. IV, вып. 2, 1926

ОБЪЯСНЕНИЯ К ТАБЛИЦЕ I

Фиг. 1. Формы плазмоптиза у *Bac. megatherium*. Старая культура на щ. м. п. агаре, сусло-агаре, щ. м. п. бульоне и пивном сусле.

Фиг. 2. «Инволюционные» формы в старых культурах на сусло-агаре и щ. м. п. агаре с сахаром: множественное деление клеток, формы приспособления и настоящие инволюционные формы (по Негели), не способные к развитию.

Фиг. 3. Прорастание разделившейся на 6 частей клетки (1 часть не проросла) в висячей капле сусла.

Фиг. 4. Прорастание «инволюционной» формы в висячей капле сусла.

Фиг. 5 Образование почки при прорастании «инволюционной» формы в висячей капле сусла.

Фиг. 6. Образование почки при обычном (нормальном) развитии *Bac. megatherium* в висячей капле сусла.

Фиг. 7. Развитие почки до нормальной вегетативной клетки в висячей капле сусла.

Фиг. 8. Новый тип деления бактериальной клетки одновременно на 3 части в средах с pH ниже 7.0

Фиг. 9. Развитие добавочной третьей части (при новом типе деления) до нормальной вегетативной формы (висячая капля сусла).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

К ВОПРОСУ О ПОЛОВОМ ПРОЦЕССЕ У БАКТЕРИЙ

Н. А. КРАСИЛЬНИКОВА

(*Представлено академиком* Г. А. Надсоном)

Вопрос о том, существует ли копуляция у бактерий тесно связан с учением о циклогении и оживленно обсуждается в новейшей микробиологической литературе. Ленис (Löhnis, 10), развивая теорию о цикле развития бактерий, рассматривает половой процесс как определенную стадию этого цикла. В доказательство наличия копуляции у бактерий он приводит ряд собственных наблюдений над различными видами и, в первую очередь, над азотобактером. Весьма убедительным фактом копуляции считает он также наблюдение Ферстера (Förster, 4), а затем Поттгоффа (Potthoff, 11) над пурпурными бактериями из рода *Chromatium*.

Не по мере усердные последователи Лениса целиком восприняли его учение. По аналогии с циклом развития высших организмов они чисто механически распространяют его на все виды бактерий, совершенно не учитывая их своеобразия и качественного отличия. Недостаточно критическое отношение привело последователей Лениса к тому, что они всюду и везде начали находить половой процесс: копулируют все формы бактерий — палочки, кокки, вибрионы и спириллы.[1] В настоящее время, вообще, многие авторы считают вопрос о копуляции бактерий разрешенным в положительном смысле. Данные Поттгоффа приводятся в учебных руководствах, как пример типичной копуляции у бактерий (Löhnis).

Есть авторы, которые, исходя из наличия копуляций у бактерий, стараются доказать даже наследование признаков по схеме Менделя (Златогоров, 5; Stewart, 13). Чрезмерное увлечение новизной теории создает опасность запутать еще более сложный вопрос о полиморфизме и дис-

[1] Склонны были также находить копуляцию и у актиномицетов (Kober, 6).

социации у бактерий, и теперь совершенно необходима вдумчивая и точная поверка положений Лениса, Эндерлейна, Альмквиста, Гедли и др.

Худяков совершенно прав, когда предупреждал против таких увлечений. В учебнике сельскохозяйственной микробиологии 1926 г. он писал: «Если к работе и наблюдениям выдающихся работников в области морфологического изучения бактерий отнестись с большим доверием и уважением, то мы поступим правильнее, если, прежде чем приступить к разрушению всего здания классической бактериологии, подождем критического обследования Ленисовских открытий» (стр. 33).

В настоящей статье поставлена задача показать на собственном экспериментальном материале несостоятельность той части положения Лениса, где он касается копуляции, притом именно на материале, который является, по мнению сторонников Лениса, наиболее убедительным.

Мной были взяты для исследования пурпурные бактерии (*Chromatium Okenii*, *Chromatium Warmingii*) и *Azotobacter chroococcum*. Преимущество этих объектов заключается в том, что они имеют сравнительно крупные размеры — обстоятельство весьма важное для наблюдения и, следовательно, для убедительности наблюдаемых явлений.

В 1929 г. во время пребывания в Солигаличе (б. Костромской губ.) мной было произведено микроскопическое обследование серных источников курорта. Около некоторых источников («Горка» и пруд в саду курорта) почва сплошь заболочена и покрыта толстым слоем совершенно черной грязи, издающей сероводородный запах. Отдельные места такой почвы были покрыты с поверхности ярко-пурпурной массой, которая, как оказалось при микроскопировании, состояла почти из чистой культуры пурпурных бактерий (*Chromatium Okenii* и *Chromatium Warmingii*).

Такая масса набиралась в цилиндрики для исследования; часть материала подвергалась непосредственному исследованию, часть фиксировалась и часть в цилиндриках выставлялась на окно, хорошо освещаемое солнцем. Спустя два года такое же обилие пурпурных бактерий найдено было мной также в одном из серных источников Старой Мацесты. Дно этого источника в том месте, где он выходит из небольшого грота и где солнечное освещение не так ярко, покрыто было сплошным ярко-красным налетом с отдельными пятнами зеленого цвета. При микроскопировании обнаружилась масса *Chromatium Warmingii* и *Chromatium minimum*, а также в небольшом количестве сине-зеленые водоросли. Материал был собран в цилиндрики и, как в первом случае, частью фиксирован, частью сохранялся в живом виде на свету.

Методика исследования в обоих случаях была одинакова. Наблюдения велись в висячей капле серной воды из источника, а параллельно этому, систематически, один или два раза в день, микроскопировался материал, сохраняемый в цилиндриках.

В течение первых 6—8 дней, при наличии достаточного количества сероводорода, организмы в цилиндриках развиваются довольно быстро. Уже на 2—3-й день на поверхности жидкости обнаруживается ясно заметное кольцо, а затем пленка, окрашенная в ярко-красный цвет. Главную массу пленки составляли *Chromatium Okenii* и *Chromatium Warmingii*.

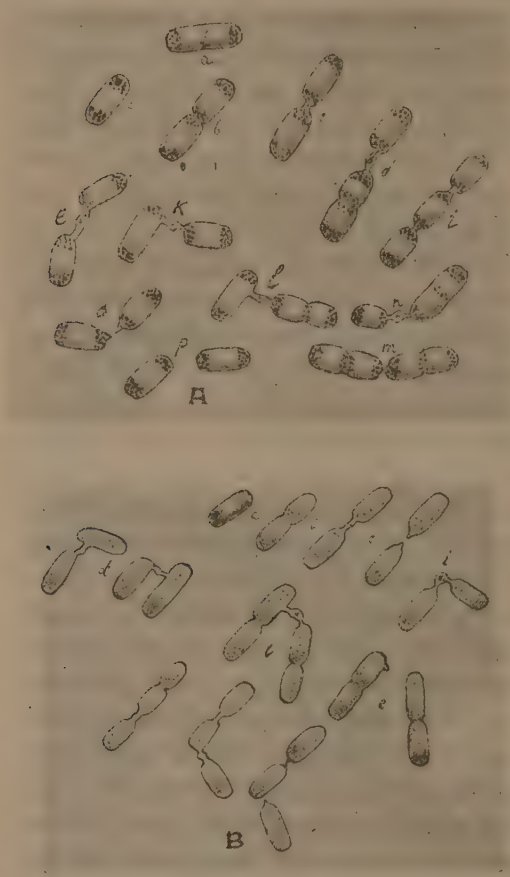
Клетки были быстро подвижные, слабо окрашенные в розовый цвет, внутри их было большое число капелек серы.

В дальнейшем, примерно, на 6—8-й день, когда количество сероводорода заметно убывает, пленка прорастает другими организмами, бесцветными бактериями, сине-зелеными водорослями и инфузориями. Клетки хромаций становятся менее подвижными, а многие совершенно неподвижными. Интенсивность окраски усиливается, принимает ярко-пурпурный цвет, сера исчезает. Жизнеспособность клеток при этом не теряется. Если их культивировать в висячей капле, то они долгое время еще продолжают интенсивно размножаться. Спустя еще несколько дней хромации в пленке исчезают, они постепенно опускаются вниз цилиндрика по его стенкам, образуя ярко-пурпурные пятна на фоне черной грязи. Вместе с этим черный цвет грязи начинает постепенно с поверхности обесцвечиваться. В дальнейшем обесцвечивание грязи усиливается, а хромации постепенно опускаются вниз, причем состав их резко меняется. Если в начале роста на поверхности были почти чистые культуры *Chromatium Okenii* и *Chromatium Warmingii*, то в глубине преимущественно развиваются мелкие формы: *Chromatium minus* (Виноградский), *Chromatium vinosum* (Виноградский), *Thiopolycoccus ruber* (Виноградский) и др. *Chromatium Warmingii* встречается реже, а *Chr. Okenii* в единичных случаях. Много клеток последних двух видов сильно изменены, они неправильной формы, угловатые, круглые, продолговатые и сильно увеличены до 30 $\mu \times 7$ μ.

Наиболее интересующие нас формы пурпурных бактерий появляются на 6—8-й день. В культурах первые дни клетки *Chr. Okenii* и *Chr. Warmingii* ничего характерного не представляют, они имеют такой же вид, как и в природных условиях, описанный многими авторами.

Но на 5-й, особенно на 6—8-й день в пленке появляется масса клеток, соединенных своими концами с помощью мостика (фиг. 1—А). Соединяются клетки по 2 по 3 и более, образуя короткие цепочки (*i*). Иногда

клетки связаны между собой не концами, а боковой поверхностью или один конец клетки соединен мостиком с боковой поверхностью другой клетки (*k-l*). Длина мостика различна — от еле заметного до 10 μ и даже более. Посередине мостика часто наблюдается небольшое вздутие с одним-тремя зернышками внутри (фиг. 1 — А, *k*, *n*). У *Chr. Okenii* образование мостиков встречается реже, чем у *Chr. Warmingii*, а потому исследование велось больше с последними. Клетки, соединенные мостиком, были вначале приняты как копулирующие; однако, наблюдения в висячей капле под контролем глаза над одной клеткой разубедило в этом. Оказалось, что такое соединение клеток представляют не что иное, как неоконченное деление, наступающее, очевидно, при малоблагоприятных условиях жизни. Это видно и из того, что первые дни, когда идет усиленное развитие и размножение бактерий, деление клеток протекает нормальным порядком. Когда же в результате большого размножения организмов и скопления продуктов обмена веществ и жизнедеятельности микробов условия существования ухудшаются, деление клеток замедляется и они принимают вышеописанный вид.



Фиг. 1. А — *Chromatium Warmingii*; В — *Azotobacter chroococcum*.

Процесс затянувшегося деления в висячей капле происходит следующим образом: клетка нормальной величины и формы (фиг. 1 — А*a*) увеличивается в длину, достигает максимального размера (a^1). В центре клетки

в это время появляются мелкие капельки серы (у *Chr. Warmingii*), число которых увеличивается, и они располагаются по линии поперечной перегородки в два ряда. Затем посередине клетки оболочка постепенно вдавливается внутрь (*g*) и, по мере того как углубление увеличивается, происходит постепенное расхождение дочерних клеток друг от друга (*c-e*).

Получается короткий и вначале довольно широкий мостик, соединяющий клетки, потом он удлиняется, становится тоньше, а спустя некоторое время разрывается, и клетки разъединяются, сохраняя недолгое время остатки мостика в виде клювиков (*o*). Довольно часто бывает, что клетки, соединенные мостиком, долгое время не разъединяются друг от друга. В таком состоянии они продолжают увеличиваться в размере и, достигнув определенной величины, в свою очередь, перешнуровываются только что описанным способом (*d-m*). Таким образом, получается короткая цепочка из клеток, как бы «копулирующих» между собой (*i*). При затянувшемся процессе деления образуется посередине мостика небольшое вздутие с одним или несколькими блестящими зернышками, а иногда и капелька серы. Зернышки эти появляются либо после того, как образовалось вздутие, либо они находились раньше внутри канала и попали туда вместе с плазмой и капелькой серы из клетки (фиг. 3).

Наиболее интересный тип соединения клеток у хромаций — это именно боковое соединение. Оно особенно близко напоминает копуляцию, наблюдаемую у дрожжей, а потому проследить способ его образования являлось наиболее важным, но в то же время и наиболее трудным, так как такое соединение вообще встречалось редко, а в висячей капле — тем более; все же, при большом числе приготовленных препаратов с висячей каплей, удается проследить и это явление. Начинается оно так же, как и обычное перешнуровывание с образованием мостика; но затем место начала мостика на конце клетки постепенно перемещается в ту или другую боковую сторону. Такое перемещение происходит вследствие роста клетки, когда удлиняется ее конец, и именно тот, от которого начинается мостик. Таким образом, место начала мостика показывает, насколько клетка удлинилась в своем росте. Особенно это демонстративно, когда рост клетки происходит в одном конце, именно в том, откуда начинается мостик.

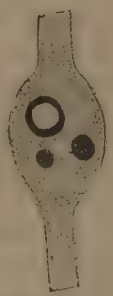
В этом легко убедиться, измеряя клетку микрометрической линейкой. Если, например, клетка, соединенная мостиком с другой, имеет вначале 7 μ длины, то эта величина, считая от свободного конца до мостика, остается прежней и после того как клетка значительно удлинилась (фиг. 2, схема).

В дальнейшем развитие клеток с боковыми соединениями происходит с такой же последовательностью, как и в первом случае, т. е. мостик разрывается, и клетки разъединяются.

Что касается внутренней структуры мостика или канала, то, несмотря на все мои попытки, обнаружить там хроматиновые тельца, о которых сообщает Поттгоф, мне ни разу не удалось это сделать. Окрашивание фиксированного материала железным гематоксилином по Гейденгайну, а также другими методами, не дало ожидаемых результатов: хроматиновые зерна в канале описываемых организмов не обнаруживаются. Встречающиеся внутри канала зернышки дают типичную реакцию на метахроматин. Они хорошо красятся метиленовой синькой, а окрашенные обесцвечиваются раствором соды и не обесцвечиваются 1% раствором серной кислоты; при кипячении в воде они исчезают (фиг. 3).

Фиг. 2. Схема образования бокового соединения (мостика) у *Chromatium*; a—b: величина клетки после перешнурования, a—c: величина прироста клетки в длину.

Описанный тип «копуляции» довольно часто наблюдался мною также у азотобактера. Как было описано мною раньше (7); в 2—3 суточных культурах на среде Эшби (Ashby) встречается масса клеток, соединенных протоплазматическим тяжем или мостиком. Клетки соединены или концами или боковой своей поверхностью (фиг. 1—*B*). Посередине мостика нередко имеются небольшие вздутия с зернышками внутри. Наблюдение в висячей капле показало, что процесс образования мостика у азотобактера точно такой же, как и у вышеописанных пурпурных бактерий. Результаты этих наблюдений опубликованы мною на страницах «Микробиологического журнала» (1931), поэтому, не желая повторяться, привожу здесь только рисунки азотобактера для сравнения с вышеописанной картиной «копуляции» у пурпурных бактерий.



Фиг. 3. Строение вздутия мостика у хромаций. В пути два метахроматических зерна и капля серы.

На фиг. 1—*B* в верхнем ряду с обозначением буквами *a*, *b*, *c* изображен способ образования мостика и его разрыв, что соответствует фиг. *a-d* у *Chr. Warmingii* (фиг. 1-*A*); в нижнем ряду (*d-e*) изображены клетки в процессе образования бокового соединения. Этим клеткам соответствуют клетки, обозначенные буквами *e-p* на фиг. 1—*A*. Сравнивая оба рисунка,

легко убедиться в близком сходстве происхождения описываемых мостиков или так называемой «копуляции».

Итак, все те данные о «копуляции» бактерий, которые приводят Поттгофф, Ферстер, Ленис и которые принимаются как доказательство существования полового процесса у бактерий, в действительности ничего общего ни с копуляцией, ни с половым процессом не имеют. Здесь имеется обычное деление, которое при малоизвестных условиях замедляется, и в результате получается картина, лишь напоминающая по внешнему виду копуляцию.

За ценные указания и советы приношу сердечную благодарность акад. Г. А. Надсону.

Микробиологическая лаборатория
Академии Наук СССР. 1932.

ЛИТЕРАТУРА

1. Almquist. Biologische Forschungen über die Bakterien, 1925.
2. Bavendamm. Die farblosen und roten Schwefelbakterien, 1924.
3. Enderlein. Bot. Cbl. Beihefte. Bd. 37, 1921, S. 53.—Bakterien-Cyklogenie, 1925.
4. Förster. Cbl. f. Bakt. Bd. 11, S. 257, 1892.
5. Златогоров С. И. Куб. Научно-Мед. Вестн., т. X—XI, 1929.
6. Kober. Cbl. f. Bakt. II Abt., Bd. 79, S. 370, 1929.
7. Красильников Микробиол. Журн., т. XII, 1931.
8. Löhnis and Smith. Journ. Agr. Research, vol. 6, p. 675, 1916, vol. 23, p. 401, 1923.
9. Löhnis. Vorlesungen über landwirtschaftliche Bakteriologie, 1926.
10. — Memoirs Nat. Acad. of Sciences, vol. 16, p. 335, 1921.
11. Potthoff. Cbl. f. Bakt., II Abt., Bd. 61, S. 249, 1924.
12. Надсон Г. А. Изв. СПб. Бот. Сада, 1903.
13. Stewart. Journ. Hyg., vol. 27, p. 379, 1928.
14. Schussing. Die pflanzliche Zelle im Lichte der Phylogenie, 1927.
15. Schussing. Verhandlungen d. Zoolog.-Bot. Ges. Wien, Bd. 74—75, S. 196, 1924—1925.

N. KRASSILNIKOV. ÜBER DEN SEXUALPROZESS BEI BAKTERIEN

Zusammenfassung

Die Frage von dem Vorhandensein eines Gemalprozesses bei Bakterien steht bis heutzutage offen. Es liegen nicht genügend Grunde vor, die erwähnte Frage im pozitiven Sinne zu lösen. Die von Löhnis am *Azotobakter* und von Potthoff an den Purpurchromazeen gemachten Beobachtungen, welche nach der Meinung der Autoren einen Beweis für die Kopulation bei Bakterien lieferten, sind als Resultat falscher Schlussfolgerungen auszusehen. Bei experimenteller Prüfung fanden die Angaben der genannten Autoren keine Bestätigung. Das, was sie für Kopulation

halten, hat in Wirklichkeit weder mit der Kopulation, noch mit dem Sexualprozess etwas gemein.

Meine eigenen Beobachtungen an Schwefelchromazeen (*Chromatium Okenii* und *Chr. Warmingii*) zeigten, dass ihre Zellen nach einer Reihe von aufeinander folgenden normalen Teilungen sich durch Abschnürung zu vermehren (Fig. 1-A) anfangen; dabei erscheint in der Mitte der Zelle an der Oberfläche eine kleine Einkerbung, welche sich vertieft und allmählich die Tochterzellen voneinander trennt (*a-d*). Dadurch entsteht eine ziemlich lange Brücke, die einen Kanal überdeckt; nach einiger Zeit zerteilt sich die Brücke und die Zellen trennen sich voneinander (*a-p*). In den Fällen, wo die Teilung der Brücke lange nicht eintritt, die Tochterzellen aber fortfahren in die Länge zu wachsen, wird die Anheftungsstelle der Brücke an die Seitenoberfläche verschoben (Fig. 2—Schema). Es entsteht eine Brücke, welche die Zellen an den Seitenoberflächen vereinigt (Fig. 1, A-*e-l*). Oft kommen kleine Ketten mit Seitenverbindung vor. In der Mitte zeigt die Brücke oft eine Auftreibung, in welcher 1—2 metachromatische Körnchen und manchmal Schwefeltröpfchen zu finden sind (Fig. 3). Chromatinkörner konnte ich im Gegensatz zu den Angaben von Potthoff nicht feststellen.

Eine genau gleichartige Bildung von Brücken wurde von mir auch bei dem *Azotobakter* (Fig. 1-B) beobachtet. In einer 1—2-tägigen Kultur auf dem Nährboden von Aschby oder noch besser auf Bierwürzeagar vermehren sich die jungen Zellen durch Abschnürung, indem sie oben erwähnte Brücken bilden (*a-i*). Es kommen auch Seitenverbindungen vor (*d-e*), welche im weiteren zerreissen, wobei die Zellen sich voneinander trennen (*e*) und im Laufe einiger Zeit die Überreste der Brücke in Gestalt eines schnabelartigen Auswuchses behalten.

Für die wertvollen Hinweise und Ratschläge, die mir im Laufe der Arbeit von dem Herren Prof. Dr. G. A. Nadson erteilt wurden, spreche ich hiermit meinen tiefgefühlten Dank aus.

Leningrad.
Mikrobiologisches Laboratorium
d. Akad. d. Wissenschaften. 1932.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ДЕЙСТВИЕ ЦИАНИСТЫХ СОЛЕЙ НА РАЗВИТИЕ ДРОЖЖЕЙ

М. Н. МЕЙСЕЛЯ

(*Представлено академиком* Г. А. Надсоном).

Со времени исследований Hansen'a, Лепешкина, Lindner'a и Beijerinck'a известна изменчивость формы и физиологических особенностей дрожжей. Но только в работах Надсона и Филиппова, посвященных вопросу образования новых стойких рас у плесневых и дрожжевых грибков под влиянием лучистой энергии, намечены пути к изучению некоторых закономерностей в образовании сальтантов под влиянием внешних воздействий; им удалось вскрыть некоторые общие направления в изменчивости пигментных особенностей, жиронакоплении и образовании гладких и складчатых колоний.

Задачей дальнейших исследований в этой области является выяснение вопроса, в какой мере и каким способом на фоне относительной общей направленности изменчивости микроорганизмов, зависящих от исторически-сложившейся морфологической и физиологической структуры организмов, конкретно реализуется специфическое воздействие внешних факторов. Познание закономерностей действия различных внешних факторов, их своеобразного преломления и трансформации в специфических особенностях организма должно дать возможность не только констатировать факт изменчивости микроорганизмов, но и овладеть до некоторой степени и самим механизмом этого процесса.

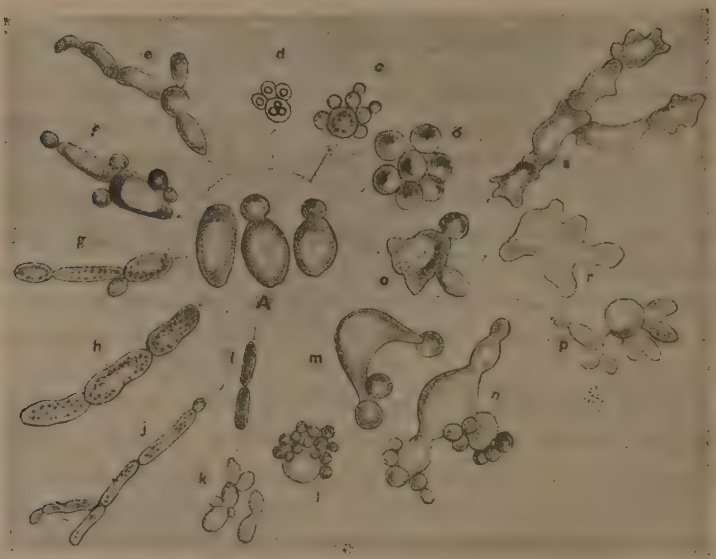
Мы исследовали строение и расообразование у *Saccharomyces cerevisiae* (12-я германская раса) под влиянием некоторых химических агентов. Так, в 1926 г., под влиянием воздействия паров хлороформа нами были получены два сальтанта, резко отличающиеся по форме колоний, микроскопическому виду клеток и аспорогенности от исходной чистой (выделенной из одной клетки) культуры дрожжей.[1] Эти сальтанты сохраняют свои осо-

[1] М. Мейсель. Влияние хлороформа на развитие дрожжей. Микробиол. журн., 1928 г.

бенности уже 6 лет, будучи при этом проведены последовательно более 200 раз через твердые и жидкие питательные среды.

В настоящем сообщении мы коснемся действия цианистых солей на тот же объект *Saccharomyces cerevisiae*. Нами было исследовано действие ряда цианистых солей, причем оказалось, что по отношению к дрожжевым организмам токсичность этих соединений такова: $HgCN > NaCN > KCN > > NH_4CNS$.

Дрожжевые организмы обладают видовой и индивидуально-различающейся резистентностью в отношении цианистых солей. *Saccharo-*

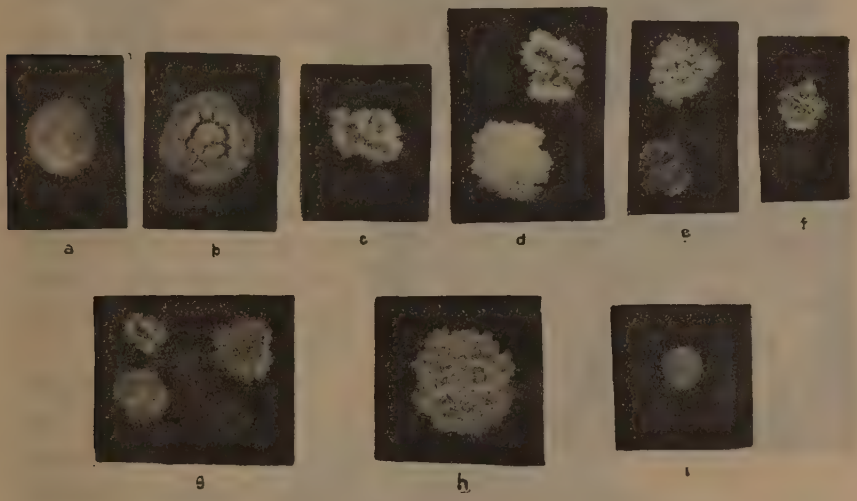


Фиг. 1.

myces cerevisiae оказался более стойким, чем *Saccharomycodes Ludwigii*; старые культуры выносливее молодых. Стойкость дрожжевых клеток по отношению к цианистому калию довольно высока; отдельные клетки выносят 24-часовое пребывание в 5% растворе KCN. Фазы изменения структуры дрожжевой клетки под влиянием цианистого калия в общих чертах те же, что описаны Надсоном при воздействии радия, Надсоном и Мейселем — при действии паров хлороформа. Отчетливо удается наблюдать самую раннюю фазу, состоящую в изменении формы вакуоли и преходящей контракции протоплазмы, как то описано Надсоном и Штерн. Особенностями действия цианистого калия являются: 1) отсутствие липо-

фанероза при условии быстрого воздействия, 2) наступающее в фазе набухания клеток некоторое просветление и гомогенизация протоплазмы и 3) отсутствие в фазе спадения и плазмолиза клеток грубой коагуляции плазмы. Более длительное пребывание дрожжей в слабых растворах KCN (I/1000) вызывает некоторое ожирение клеток. Это ожирение своеобразно: жир часто встречается не в виде капель, а угловатых блестящих глыбок, лежащих нередко в вакуолях.

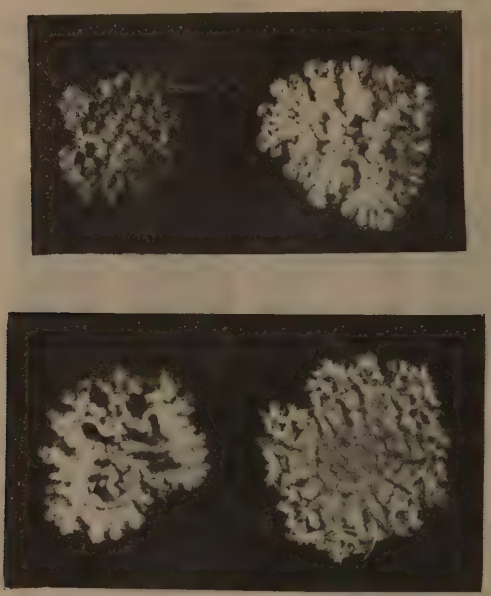
При этих же условиях наблюдается и попытка дрожжевых клеток к споруляции, обычно не совсем правильной и законченой. Особенно интересно изменение реакции вакуолей в сторону большей щелочности после



Фиг. 2.

пребывания дрожжей в слабых растворах цианистого калия; в этих условиях раствор нейтральрота, проникая в вакуоль, окрашивает ее диффузно в интенсивно коричневый цвет, в то время как в нормальных клетках нейтральрот окрашивает избирательно метахроматин в красный цвет. Посевы на чашке Петри чистой культуры *Saccharomyces cerevisiae* после пребывания ее в течение 24 или 48 часов в крепких растворах цианистого калия дают рост колоний, часть которых резко отличается по виду от нормальных исходных. Вместо обычных для 12-й расы *Saccharomyces cerevisiae* белых, гладких, блестящих колоний появляются разнообразные складчатые, матовые, с шагреневой поверхностью и окрашенные в желтоватые и коричневатые тона колонии. Микроскопическое исследование показывает, что эти

колонии состоят из клеток, резко отличающихся по форме и внутренней структуре от исходных. Многочисленные опыты позволяют нам начертить примерную схему основного веера направлений изменчивости (фиг. 1) при воздействии цианистого калия. Характерным, повидимому, здесь является относительная частота появления округлых и амебовидных клеток и сравнительная редкость возникновения длинных мицелиальных форм.



Фиг. 3.

Необходимо отметить, что гладкость или складчатость гигантской колонии еще не дает полной характеристики культуры дрожжей. Нередко одинаковые по форме гладкие или складчатые колонии состоят из резко отличающихся по форме и внутренней структуре клеток. Это обстоятельство лишний раз подчеркивает всю недостаточность и относительность классификации изменчивости на «R» и «S» формы.

Нам удалось получить в результате опытов с цианистым калием около 40 штаммов *Saccharomyces cerevisiae*, отличающихся друг от друга по форме и структуре клеток и колоний. Часть из них сохраняет свои особенности уже свыше года, будучи при этом проведена последовательно около 30 раз через питательные среды и они могут рассматриваться как сальтанты. По биологическим и физиологическим свойствам эти сальтанты также отличаются от исходной культуры. Часть из них дает очень быстрое и сильное жиронакопление; другие, даже в старых культурах, почти не имеют жира. Скорость роста и размножения, способность к споруляции, содержание гликогена и метахроматина, проницаемость для красок у полученных сальтантов также весьма различны. Некоторые штаммы способны разжижать желатину. Пробы на бродильную способность показывают, что большая часть рас дает заметное отставание скорости и интенсивности сбраживания сахаров. Однако несколько штаммов обнаруживают явное

a b c d

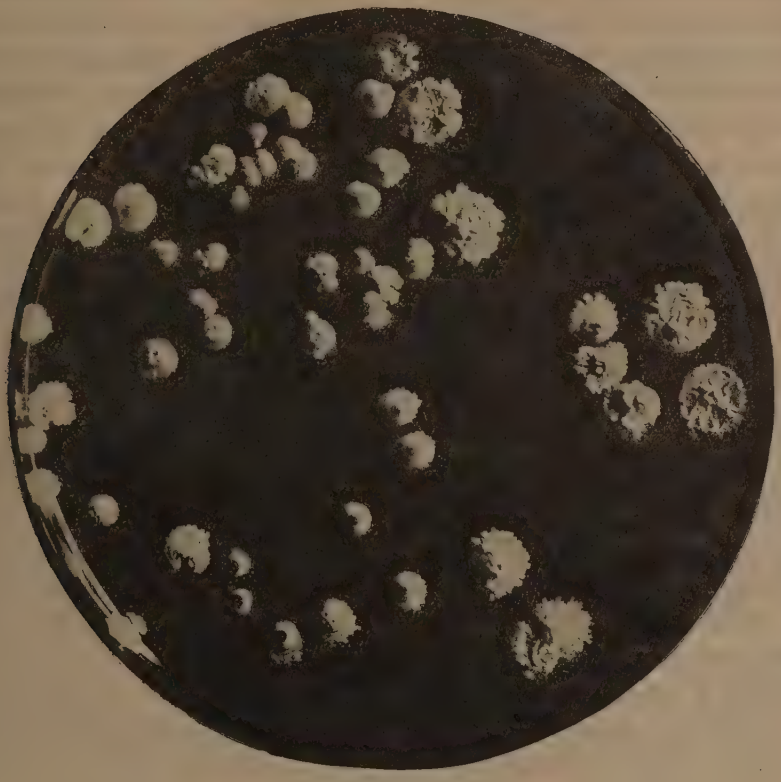
Фиг. 4.

ускорение и, особенно, усиление бродильной способности. Один из имеющихся сальтантов утратил почти полную способность к брожению, несмотря на вполне отчетливый рост в питательной среде. В связи с ускорением размножения клеток у некоторых рас наблюдалось значительно большее, чем в исходных культурах, нарастание общей массы живого вещества (на 10—15 весовых процентов).

Фиг. 5.

Некоторые из полученных стойких сальтантов были испытаны в качестве источников для новых расщеплений. Для этой цели из них выделялись чистые культуры из одной клетки и, после тщательного исследования, они вновь подвергались действию растворов цианистого калия. Последующие разливки в чашках Петри показали, что некоторые из сальтантов дают снова расщепление и таким образом могут являться центрами нового расообразования (Фиг. 5 и 6). Так, например, стойкий сальтант, имеющий клетки амебовидной формы, дает снова амебовидную форму несколько иного типа и расу, состоящую из округлых неамебовидных клеток (Фиг. 1— *o*, *p*, *r*, *s*). Сальтант с характерными короткими колбасовидными клетками дает расы

с более длинными, мицелиевидными клетками и расу с круглыми, интенсивно почкующимися клетками (фиг. 1 — *i, j, k, l*). Интересно отметить, что при образовании самых разнообразных сальтантов у *Saccharomyces cerevisiae* удается подметить две основные тенденции в отношении внешней формы клеток, это — тип более или менее круглых и тип более или менее удлинен-



Фиг. 6.

ных клеток. Так амебовидные сальтанты дают типы с более округлыми и типы с более удлиненными амебовидными клетками.

Разнообразие особенностей культурных, биологических и физиологических свойств у вторичных сальтантов так же велико, как и у первичных. На фиг. 2 демонстрируются гигантские колонии вторичных сальтантов (*d, e, f, g*), полученные из первичного сальтанта (*c*). Гигантская колония — фиг. 2 *a* — принадлежит исходной нормальной расе. На фиг. 3 видны некоторые из упомянутых выше колоний (*d, e*) при бо́льшем увеличении.

Наконец следует остановиться еще на одном явлении, выступающем особенно резко при воздействии цианистого калия на дрожжи, именно на наследственно передающуюся пониженную жизнестойкость некоторых экспериментально полученных рас. Колонии дрожжей, проросшие после действия на них крепких растворов цианистого калия, часто обнаруживают пожелтение и потемнение, начинающееся с центра и постепенно распространяющееся на всю колонию (фиг. 4 *a*, *b*); колония становится темнокоричневой и, обычно, прекращает увеличиваться в размере. Микроскопическое исследование таких колоний на разных стадиях их потемнения показывает, что вначале клетки резко уменьшаются в размере (обычно в 2-3 раза), доходя до 2—2,5 μ в диаметре. Оболочки их утолщаются, плазма, особенно прилежащая к вакуоли, уплотняется, начинает сильно преломлять свет, затем сжимается, отходит от оболочки клетки и лежит в виде наполненного жировыми капельками комочка внутри клетки. Затем происходит постепенный лизис протоплазмы, и остаются лишь утолщенные, угловатые оболочки. Следует отметить, что в таких сублетальных и подвергающихся своеобразному лизису колониях иногда происходит новое расщепление с образованием более стойких и жизнеспособных рас. В этом случае на фоне отмирающих потемневших колоний возникают новые, белые, вторичные колонии (фиг. 4 *c*, *d*). Описанное явление понижения жизнеспособности дрожжевых культур передается по наследству. Мы сейчас имеем уже седьмой пересев на свежую питательную среду нескольких рас, дающих сперва обычный рост, а затем подвергающихся потемнению и лизису. У некоторых рас эта пониженная жизнестойкость настолько резко выражена, что мы их потеряли при третьем или четвертом пересеве; дальнейшие пересевы на твердые и жидкие питательные среды уже не дали роста. Эти расы погибли.

Работа выполнена в Микробиологической лаборатории Академии Наук СССР под общим руководством акад. Г. А. Надсона.

Ленинград. III 1932.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

ALGENKALKKNOLLEN AUS DEM RUSSISCHEN DEVON

Von Julius PIA

(*Présenté par* A. Borisĭak, *membre de l'Académie des Sciences*)

So weit die von Herrn R. Hecker mir freundlichst zur Untersuchung überlassenen Fossilien aus dem Oberdevon des Gebietes südlich von Leningrad mit Sicherheit oder doch mit genügender Wahrscheinlichkeit auf Algen zurückgeführt werden können, handelt es sich durchwegs um unregelmässig kugelige, konzentrisch geschichtete Kalkknollen. Sie fallen also unter den Begriff der Phykopsephen (Pia, 1931 a, S. 148). Ihre Oberfläche ist bald fast glatt, bald deutlich höckerig oder wulstig. Leider sind nur in verhältnismässig wenigen Fällen die Abdrücke ursprünglich vorhandener Algenfäden unter dem Mikroskop nachweisbar. Dann haben wir es also nach meiner Nomenklatur mit Porostromata zu tun (Pia in Hirmer, 1927, S. 37), und zwar durchwegs mit der Sammelgattung *Girvanella*. Die meisten Knollen zeigen im Dünnschliff keine organische Struktur. Sie gehören zu den Spongiostromen (a. ang. O., p. 36).

Alle die angeführten Gruppen- und Gattungsnamen, einschliesslich *Girvanella*, sind—das sei noch einmal ausdrücklich betont—nicht etwa als wirkliche systematische Einheiten aufzufassen. Sie dienen nur dazu, die fossilen Algen benennen und beschreiben zu können.

Stratigraphisch ist mit den zu besprechenden Fossilien nicht viel anzufangen. Bei der grossen Seltenheit devonischer Kalkalgen sind sie aber schon an sich bemerkenswert und liefern ausserdem einen Beitrag zur Frage nach der Entstehung der devonischen Kalke.

1. Girvanella

a) *Girvanella amplefurcata* nov. sp.

Auf die äussere Form der Knollen komme ich erst unten, bei Erwähnung der einzelnen Fundorte, zu sprechen.

Unter dem Mikroskop sieht man stellenweise massenhaft mit hellem Kalzit ausgefüllte Röhrchen von etwa 0.03 mm Durchmesser. Ihr Verlauf ist sehr unregelmässig, zackig gekrümmt. Sie sind reichlich verzweigt (Taf. I, Fig. 1, 2). Die Fäden scheinen grössere, zusammenhängende Lagen besonders im äusseren Teil der Kalkkörper einzunehmen. Andere Abschnitte aber, besonders im Inneren, zeigen keine Struktur, wären also eigentlich als *Pycnostroma* zu bezeichnen. Das ist ja eine bei den Phykopsephen ganz allgemeine Erscheinung, die wohl teilweise auf zufälligen Verschiedenheiten der Erhaltung beruht, teilweise aber darauf, dass mehrere Arten und Gattungen von Algen zusammen einheitliche Knollen aufbauten, wie dies ja auch in der Gegenwart oft zu beobachten ist.

1) VERGLEICH MIT ARTEN AUS DEM DEVON

Wie ich wiederholt als merkwürdig hervorgehoben habe (Pia, 1931 b, S. 12; 1931 c, S. 32), sind Kalkalgen im Devon ausserordentlich selten. Es kommen deshalb auch nur sehr wenige ungefähr gleichaltrige Formen für einen Vergleich mit der besprochenen *Girvanella* in Betracht.

Aus dem Oberdevon Schlesiens kennt man «*Sphaerocodium*» *zimmermanni* Rothpl. (Rothpletz, 1914; Schindewolf, 1925). Herrn Kollegen Schindewolf in Berlin verdanke ich Material dieser Art. Die Beschreibung, die Rothpletz gegeben hat, kann ich im ganzen bestätigen (vergl. Taf. I, Fig. 4). Am reichlichsten sind Schläuche von etwa 0.015 mm Durchmesser entwickelt. Sie sind lebhaft hin und her gekrümmt, gelegentlich auch unter ziemlich spitzem Winkel gegabelt. Die Scheiden sind dunkel, die Ausfüllungen nicht heller, als die umgebende Grundmasse des Knollens. Hier und da erkennt man dichte Anhäufungen wesentlich feinerer Fäden, mit einem Durchmesser von weniger als 0.01 mm. Sie sind vielleicht nur wegen etwas zu grosser Dicke des Schliffes nicht besonders deutlich. An vielen Stellen bemerkt man endlich grössere Hohlräume mit ganz durchsichtiger, kalzitischer Ausfüllungsmasse. Sie entsprechen vermutlich den Endzellen bei Rothpletz. Ob dessen Beschreibung genau zutrifft, müsste erst an einer grösseren Zahl von Schliffen geprüft werden. Vorläufig scheint es mir, dass die «Endzellen» ganz vorwiegend birnförmig sind. Gelegentlich scheinen zwei «Birnen» hinter einander zu sitzen. Dagegen sah ich keine sicheren Gabelungen, vielleicht infolge ungünstiger Lage des Schliffes. Ich konnte mich auch nicht überzeugen, dass die «Endzellen» wirklich am Ende von Schläuchen sitzen. Der kleinere Durchmesser dieser birnförmigen Körper beträgt etwa 0.05 bis 0.07 mm, also mehr, als Rothpletz angibt.

Ich halte es immer nöch für das Wahrscheinlichste, dass diese verschiedenen «Gewebe» verschiedenen Arten angehören, die mit einander nur zufällig vergesellschaftet waren. Vielleicht entsprechen meine birnförmigen Körper einer Spezies, die Rothpletz nicht vorlag, wogegen ich seine Endzellen in meiner Präparaten bisher nicht gefunden hätte.

Bezüglich der Auffassung der Gattung *Sphaerocodium* stehen einander heute vorwiegend noch zwei Meinungen gegenüber. Ich selbst bin immer dafür eingetreten, dass es sich nicht um ein wirkliches Genus handelt, sondern um eine Bezeichnung für Knollen, die durch Verwachsung mehrerer Algenformen, Spaltalgen und vielleicht auch anderer, gebildet sind. Die Verfasser, die von der Untersuchung der paläozoischen Arten ausgehen, neigen dagegen oft dazu, den Namen auf jene Alge anzuwenden, die die mehrfach gegabelten, verbreiterten Endzellen erzeugt, wie sie besonders an *Sphaerocodium munthei* so schön zu sehen sind. Mir scheint eine solche Deutung deshalb schwer haltbar, weil diese Art von Endzellen dem Typus der Gattung, *Sphaerocodium bornemanni,* ja nicht zukommt.

Darauf näher einzugehen, ist jedoch hier kein Anlass. Jedenfalls dürfte aus meiner kurzen Beschreibung und aus dem Vergleich der Figuren hervorgehen, dass keiner der unter dem Namen *Sphaerocodium zimmermanni* zusammengefassten Bestandteile mit unserer Alge aus dem russischen Devon eine grössere Aehnlichkeit hat. Am ehesten könnte man noch an einen Vergleich mit den von Rothpletz beobachteten Endzellen denken. Doch sind diese wesentlich gröber und gabeln sich unter ganz spitzem Winkel. Auch von einer Verdickung der Fäden vor der Gabelung ist bei *Girvanella amplefurcata* nichts zu bemerken, so dass sich ein ganz verschiedenes mikroskopisches Bild ergibt. Dazu kommt, dass die Endzellen von *Sphaerocodium zimmermanni* sich fast nur in einer Ebene zu verzweigen scheinen.

Ein *Sphaerocodium gippslandicum* wurde von Chapman (1917 & 1920) aus dem Mitteldevon von Victoria (Australien) bekannt gemacht. So weit sich aus der allzu kurzen Beschreibung und der mangelhaften Abbildung schliessen lässt, hat dieses Fossil weder mit *Girvanella amplefurcata* noch überhaupt mit *Girvanella* oder *Sphaerocodium* etwas zu tun, denn die Fäden sind radial gestellt und — falls ich recht verstehe — in Zellen gegliedert.

Ausser den eben besprochenen beiden Arten kämen zum Vergleich mit unserem Fossil noch einige Abbildungen devonischer Algen in Betracht, die nicht mit Namen belegt sind. Die älteste stammt von Wethered (1892, Taf. 9, Fig. 3, S. 378). Hier handelt es sich um annähernd parallele Schläuche von etwa 0.2 mm (?, soll nach der Abbildung wohl 0.02 mm

heissen). Dass dieses durchaus zweifelhafte Fossil, dessen Zurechnung zu *Girvanella* Wethered selbst für unsicher hielt, mit unserer Alge nichts zu tun hat, liegt auf der Hand.

Jüngst hat M-lle Le Maître (1930) aus dem nordfranzösischen Mitteldevon Sphaerocodien beschrieben, die sie mit *Sphaer. gotlandicum* vergleicht. Ich möchte glauben, dass ihr mehrere verschiedene Arten vorlagen. Für den Vergleich mit der russischen Form kommen am ehesten die grössten Fäden, vom Kalvarienberg bei Glageon, in Betracht (S. 44). Ihr Durchmesser liegt zwischen 0.022 und 0.033 mm. Am Ende sollen rundliche Auftreibungen von 0.044 bis 0.055 mm Dicke sitzen. Die Verzweigung scheint nach einer der Figuren (Taf. 3, Fig. 13) reichlich zu sein. Im Text ist von diesem wichtigen Punkt leider nicht die Rede. Die besprochene Form dürfte *Girvanella amplefurcata* nach dem Gesagten recht ähnlich sein. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass sie mit ihr spezifisch übereinstimmt. Auch Spuren von Auftreibungen am scheinbaren. Ende der Schläuche bemerkt man gelegentlich in meinem Material (Taf. I, Fig. 1, unten). Allerdings ist gerade dieses Merkmal nicht leicht sicher zu beobachten. Es ist ja klar, dass der Anschein einer knopfförmigen Endigung auch entstehen muss, wenn ein Faden, der vom Schliff longitudinal, aber nicht ganz axial getroffen ist, sich an einer Stelle plötzlich in die Schliffebene hineinbiegt, so dass der tangentiale Längsschnitt in einen Querschnitt übergeht, der jetzt erst die volle Dicke des Fadens zeigt. Da die französische Alge nicht benannt wurde, kommt sie ja übrigens für die reine Frage der Namengebung nicht weiter in Betracht.

Die Beschreibung devonischer Algen aus Kleinasien, die Delépine vor kurzem veröffentlicht hat, konnte ich leider noch nicht einsehen (vergl. Garwood, 1931, S. LXXXIV).

Da sich also bei den bisher benannten devonischen Girvanellen keine Anknüpfung für die untersuchte Alge aus Russland finden liess, schien es doch notwendig, noch andere, stratigraphisch etwas weiter entfernte Formen zu vergleichen, wenn auch weniger ausführlich.

2) VERGLEICH MIT ARTEN AUS DEM ORDOVIZIUM

Girvanella problematica Nich. et Eth. ist, wie ich unlängst (1932) dargelegt habe, offenbar eine Sammelart, in der mehrere recht verschieden grosse Formen zusammengeworfen sind. Die Angaben über die Dicke der Schläuche schwanken zwischen 0.006 und 0.04 mm. Ausdrücklich wird jedoch betont, dass die dichotome Teilung der Fäden nur selten klar zu

sehen ist (Garwood, 1914, S. 267). Das scheint ein wesentlicher Unterschied gegenüber unserer Art zu sein.

Strephochetus ocellatus Seely (Seely, 1885 und 1886) wird nach den Beschreibungen und Abbildungen sicherlich mit Recht zu *Girvanella* gestellt. Der äussere Durchmesser der Schläuche ist 1/1450 (nach einer späteren Angabe—1902, S. 154—nur 1/2000) inch=0.0175 mm. Von Verzweigung ist in Zeichnungen nichts zu sehen. Die Art ist also offenbar von der untersuchten devonischen recht verschieden.

Seely hat (1886 und 1902) noch eine Reihe weiterer Spezies aufgestellt: *Strephochetus striatus, Str. brainerdi* und *Str. prunus*. Die beiden ersten sollen nach ihm dem inneren Bau nach übereinstimmen. Die gewöhnlichen, gegabelten und gewundenen Kanäle gehen in weitere von 0.05 bis 0.1 mm Durchmesser über. Diese sind oft so dicht zusammengedrängt, dass sie im Querschnitt polygonal erscheinen. Taf. 58, Fig. 7 (1902) erinnert stark an *Sphaerocodium munthei* Rothpl., aber nach fig. 8 scheint die Verzweigung nicht in einer Ebene zu erfolgen. Bassler (1915, S. 547) vermutet, dass *Streph. brainerdi* und *Str. prunus* mit *Str. ocellatus* zusammenfallen. Nach der Beschreibung ist dies für *Str. brainerdi* nicht gerade sehr wahrscheinlich, wenn es auch möglich ist, dass ein oder die andere Art von *Girvanella* in beiden Aggregaten auftritt. Die Abbildung von *Streph. prunus* (Seely, 1902, Taf. 58, Fig. 6) zeigt dicke Schläuche zwischen den dünnen, die in der Beschreibung nicht erwähnt werden. Die Struktur scheint nach Taf. 57, Fig. 5 mehr radial als konzentrisch zu sein, so dass es sich wohl nicht, oder doch nicht vorwiegend, um eine *Girvanella* handelt.

So viel ich sehe, haben alle diese Formen mit dem Fossil aus dem russischen Devon wenig zu tun.

Stromatocerium richmondense Miller (vergl. Bassler, 1915, S. 547) wird vielfach ebenfalls zu *Girvanella* gestellt. So weit ich aber die Beschreibung verstehe, verlaufen die Röhren grossenteils radial. Es mag sich also um eine andere Gattung handeln.

Stromatocerium moniliferum Seely (1904, S. 149, Taf. 73, unten u. Taf. 74, Fig. 3, 4) kann vielleicht eine Alge sein, unterscheidet sich von dem hier besprochenen Fossil aber jedenfalls durch die perlschnurähnlichen Röhrchen, falls diese nicht nur durch Querschnitte neben einander liegender Verzweigungen eines Fadens vorgetäuscht werden (vergl. Rothpletz, 1913, S. 20, Taf. 4, Fig. 2).

James (1891, S. 51) stellt *Streptospongia labyrinthica* Ulrich zu *Girvanella*. Nach der Beschreibung und Abbildung (Ulrich, 1889, S. 244 und

Textfig. 8 auf S. 239) ist der Körper jedoch nicht aus Schläuchen, sondern aus Lamellen aufgebaut. Diese sind ausserdem so grob, dass man sie mit freiem Auge deutlich ausnimmt. Bassler hat jedenfalls recht, wenn er diese Art nicht zu den Kalkalgen zieht (1915, S. 1207).

3) VERGLEICH MIT ARTEN AUS DEM SILUR

Sphaerocodium gotlandicum Rothpletz (1908, S. 7; 1913, S. 19). Für einen Vergleich mit unserer Alge ans dem russischen Devon kommen zunächst die Endzellen dieser Art in Betracht. Sie sind 0.025 bis 0.040 mm breit, lebhaft gegabelt. Die Verzweigung erfolgt aber unter einem ganz spitzen Winkel (vergl. 1908, Taf. 2, Fig. 2) und fast nur in einer Ebene, was beides für die russische Art nicht zutrifft. Ausserdem bildet diese ganz glatte Knollen, die schwedische aber recht unebenflächige, manchmal sogar grobästige (vergl. bes. die Figur von Munthe, 1910, Fig. 3).

Nicht unähnlich mit *Girvanella amplefurcata* ist auch das Grundgewebe von *Sphaerocodium munthei* Rothpletz (1913, S. 23). Seine Schläuche sind im Durchschnitt 0.018 mm dick, also kleiner, als bei jener. Die Verzweigung ist reichlich, erfolgt aber scheinbar vorwiegend in einer Ebene. Die Form der Knollen ist dieselbe, wie bei *Sphaerocodium gotlandicum*.

Girvanella conferta Chapman (1907, S. 12, Taf. 6, Fig. 13 u. 14) hat nur einen Fadendurchmesser von etwa 0.017 mm. Bezeichnend soll sein, dass die Schläuche sehr dicht beisammen liegen. In der Abbildung Fig. 14 schliessen sie tatsächlich viel enger zusammen, als bei unserer Art. Schliesslich sollen Querwände vorkommen, was freilich anerkanntermassen schwer sicher zu beobachten ist.

Was Chapman (1907, S. 13) *Girvanella pisolithica* Wethered nennt, ist wegen der in kugelige Segmente gegliederten Fäden wohl eine besondere Art (vergl. jedoch die Bemerkung auf S. 7). Auch ist die Grösse viel bedeutender, als bei unserer Spezies (Durchmesser durchschnittlich 0.07 mm).

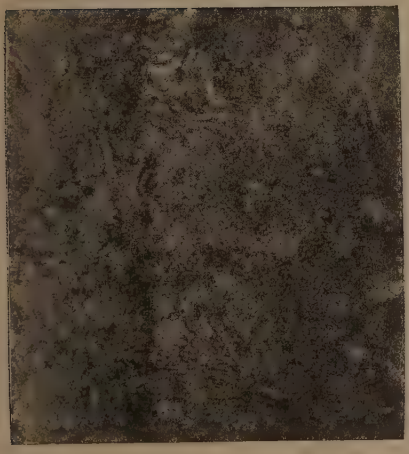
«*Girvanella* cf. *incrustans*» Chapman (ebend. S. 13) ist dagegen kleiner, als *Girv. amplefurcata*.

4) VERGLEICH MIT ARTEN AUS DEM KARBON

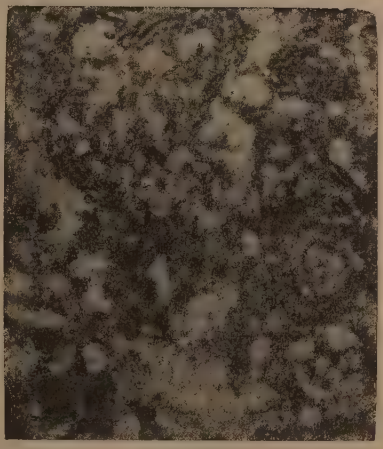
Wie ich anderer Stelle kurz dargelegt habe (Pia, 1932), glaube ich im englischen Kohlenkalk am besten nur zwei Arten von *Girvanella* zu unterscheiden, *Girv. ducii* Wethered mit etwa 0.02 mm Schlauchdurchmesser und *Girv. staminea* Garwood mit 0.006—0.007 mm Schlauchdurchmesser. Beide kommen wegen der geringeren Grösse und der Seltenheit von

1

2



3



4

Gabelungen für einen Vergleich mit unserer Art nicht weiter in Frage. Maslov (1929) glaubt *Girv. ducii* auch im Donetz-Becken aufgefunden zu haben. Die Abmessungen stimmen überein.

Girvanella sinensis Yabe aus dem Karbon (?) von China. eine noch nicht sehr gut bekannte Art, enthält Zellfäden von nur etwa 0.01 mm Dicke (Yabe, 1912, S. 1).

Krumbeck (1922, Tabelle nach S. 20) erwähnt ein «*Sphaerocodium* cf. *bornemanni*» aus oberkarbonem Fusulinenkalk von Nordpersien. Durch die Freundlichkeit Herrn Prof. E. Dacqués (München) konnte ich das von Niedermayer mitgebrachte Handstück untersuchen. Eine kurze Beschreibung mit Abbildungen wird vielleicht im Rahmen eines grösseren Berichtes über die Ergebnisse jener Expedition erscheinen. Unter den verschiedenen, die Knollen aufbauenden, wohl kaum alle zur selben Art gehörigen Schläuchen sind solche, die unserer russischen Art ungemein ähneln. Besonders die reiche und ziemlich stumpfwinklige Verzweigung erzeugt ein übereinstimmendes Gesamtbild. Die karbonische Form scheint durchschnittlich etwas, aber nicht viel grösser zu sein, als die devonische. Auch neigt sie an den meisten Stellen wohl mehr zu einem streng tangentialen Verlauf der Fäden. Ob das Unterschiede von spezifischem Wert sind, erscheint zweifelhaft. Einen Namen habe ich der persischen Art nicht gegeben, weil es zu schwierig war, die in denselben Knollen vergesellschafteten, nicht ganz übereinstimmenden Formen richtig aufzuteilen.

5) VERGLEICH MIT ARTEN AUS DEM PERM

Aus dieser Epoche werden Girvanellen bisher kaum angeführt. Dass sie trotzdem nicht fehlen, zeigt mir ein Dünnschliff aus dem Nachlass Prof. G. Steinmanns (Bonn). Er stammt aus ger Gegend von Tarvis im österreichisch-italienischen Grenzgebiet und ist mit dem Manuskriptnamen «*Sphaerocodium permicum* Steinmann» bezeichnet. Die Form gleicht in der Grösse ungefähr unserer devonischen Art, die Fäden sind aber viel weniger gekrümmt und verzweigt. Sie umwächst eine andere Kalkalge, wohl ein *Gymnocodium*.

Aus der vorstehenden gedrängten Übersicht dürfte einigermassen sicher hervorgehen, dass unsere devonische Alge vom Kudeb Fluss unter keine der schon benannten *Girvanella*-Arten eingereiht werden kann. Da es sich offenbar um ein ziemlich reines und recht bezeichnendes Vorkommen einer einzigen Spezies handelt, hielt ich es für zweckmässig, einen neuen Namen zu geben. Ich fasse die Definition noch einmal kurz zusammen:

Girvanella amplefurcata nov. sp. bildet um Fossilbruchstücke glatte Knollen von einigen Zentimetern Durchmesser, in denen sie mit *Pycnostroma* vergesellschaftet ist. Schläuche sehr reichlich und unter grossem Winkel verzweigt, lebhaft gekrümmt, der Oberfläche des Knollens im einzelnen nicht sehr genau parellel, mit einem Durchmesser von etwa 0.03 mm.

Typischer Fundort der erste von den gleich zu nennenden.

Urstücke in der Sammlung des Zentralen Geologischen Museums in Leningrad.

Am meisten Aehnlichkeit besteht mit einer von Le Maître aus dem nordfranzösischen Devon beschriebenen und mit einer von Niedermayer im nordpersischen Oberkarbon gesammelten Art. Beide sind noch unbenannt (vergl. SS. 5 und 10).

Fundorte:

1) Kudeb, linker Nebenfluss der Welikaja, Aufschluss 10, Schicht 8; D^1_3, Svinord-Schichten. Ges. Hecker, 1930. Hier ist die Struktur am schönsten zu sehen. Die Beschreibung gründet sich deshalb im wessentlichen auf die Stücke von diesem Fundort. Aeusserlich sind die Knollen eher unscheinbar, von 2 bis 3 cm Durchmesser. Ein Kern aus einer Mollusken- oder Brachiopodenschale ist in der Regel zu erkennen, wenn die Phykopsephen auseinandergebrochen sind. Er liegt oft stark exzentrisch.

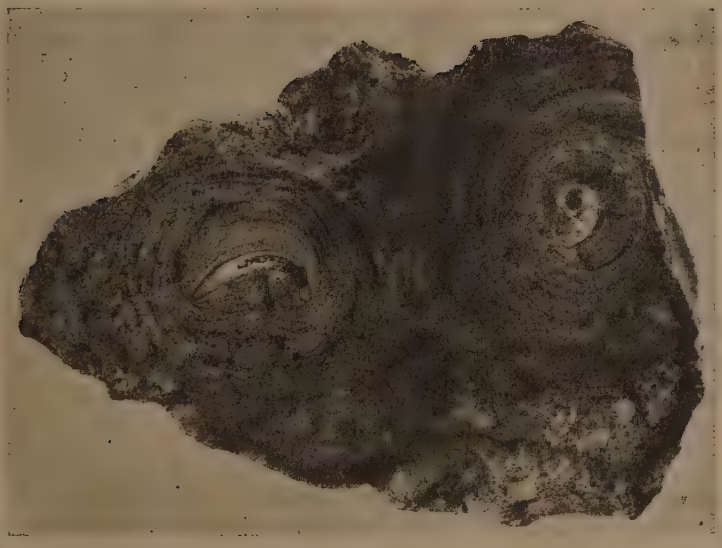
2) Kudeb, Aufschluss 8, Schicht 8. D^1_3, Svinord-Schichten. Ges. Hecker, 1930. Hier handelt es sich augenscheinlich ebenfalls um *Girvanella amplefurcata*, wenn die mikroskopische Struktur auch weniger gut erhalten ist. Da die äussere Form der Knollen und ihr Wachstum rings um ein anderes Fossil an einem Fundstück von diesem Aufschluss besonders schön zu sehen ist, bringe ich von ihm ein Habitusbild (Taf. II, Fig. 2).

b) *Girvanella ducii* Wethered.

Fundort: Fluss Schelonj, Dorf Suchlova. D^1_3, Tschudovo-Schichten. Ges. Hecker, 1929.

Ziemlich unansehnliche Knollen von meist unter 1 cm grösstem Durchmesser. Die konzentrische Schichtung ist für das freie Auge nicht sehr deutlich. Unter dem Mikroskop erscheinen die Phykopsephen ziemlich dunkel braun. Hie und da sieht man in ihnen mehr oder weniger deutlich die Scheiden von Spaltalgen, die sich als fast schwarze Linien darstellen (Taf. I, Fig. 3). Ihre innere Ausfüllung ist nur selten hell, meist gleicht sie der umgebenden Masse des Knollens. Der Durchmesser der Schläuche beträgt

1



2

etwa 0.02 mm. Sie sind gekrümmt und gegabelt, beides aber viel weniger ausgiebig, als bei *Girvanella amplefurcata*. Wie Beschreibung und Abbildung zeigen, besteht kein klarer Unterschied zwischen dem besprochenen Fossil und der unterkarbonischen *Girvanella ducii* Wethered (vergl. etwa Wethered, 1890, Tab. 11, Fig. 2; Garwood u. Goodyear, 1924, Taf. 19, Fig. 2). Da auch der zeitliche Abstand nicht allzu gross ist, dürfte es jedenfalls am besten sein, unsere Stücke mit der karbonischen Art zu vereinigen. (Vergl. über diese auch die Bemerkungen weiter oben, S. 1350—1351).

2. Pycnostroma

Es wurde schon erwähnt, dass auch diejenigen Knollen, in denen Algen sicher nachweisbar sind, die entsprechende Struktur durchaus nicht an allen Stellen zeigen. Dasselbe gilt von denjenigen, die Stromatoporen enthalten. Ausserdem lagen mir aber viele Schliffe vor, in denen nirgends eine deutliche organische Struktur zu erkennen war. Anorganische Entstehung ist für diese Gebilde trotzdem recht unwahrscheinlich. Die Stromatoporen sind, wie mir Herr Kollege Hecker mitteilt, dort, wo sie überhaupt auftreten, meist gut erhalten. Es ist also das Wahrscheinlichste, dass wir es in den besprochenen Fällen mit Spongiostromen zu tun haben (vergl. S. 1345). Frei im Gestein liegende, rundliche, nichtästige Spongiostromen bezeichne ich als Pycnostroma (Pia, 1928, S. 212, Fig. 1).

Ich hebe einige Fundorte solcher Fossilien hervor:

1) Am Fluss Schelonj, Dorf Suchlowa. D^1_3, Tschudovo-Schichten. Hecker, 1929. Die Knollen sind bis 6 cm gross, glatt, gut geschichtet. Im Schliff erkennt man stellenweise Stromatoporen, ferner häufig kleine tierische Schalen, die offenbar passiv eingeschlossen wurden. Unregelmässige, ziemlich grobe, mit einer dunklen Masse ausgefüllte Hohlräume sind jedenfalls tierische Bohrgänge. Meist sind reichlich Kalkspatrhomboeder neu gebildet. Schliesslich bleibt nach Abzug aller dieser Strukturen eine wolkige Kalkmasse, die man wohl als wenig veränderten ursprünglichen Algenkalk ansehen wird dürfen. Manchmal glaubt man Spuren von Girvanellen zu erkennen, doch sind sie nirgends halbwegs sicher.

2) Linkes Ufer der Welikaja, unterhalb Ostrov; Dorf Motschalowo. Aufschluss 12, Oberfläche der Schicht 9. D^1_3, Svinord-Schichten. Hecker, 1930. Ziemlich grosse, gut geschichtete Knollen, manchmal von auffallend länglicher Gestalt. Im Schliff ist kaum etwas zu sehen, als unregelmässige, mit Kalzit ausgefüllte Hohlräume, die hie und da in etwas bo-

gigen Lagen angeordnet sind und dadurch offenbar die megaskopisch so auffallende Schichtung bedingen.

3) Kudeb Fluss. D^1_3, Svinord-Schichten. Hecker, 1930. Durchmesser der Knollen bis 8 cm. Sie sind teilweise weniger glatt, als die bisher besprochenen, sondern zerfallen manchmal durch tiefe, mit Sediment ausgefüllte Gruben oder Spalten in mehrere breite Aeste (Taf. II, Fig. 1). Sie bilden also einen Uebergang zu *Ottonosia* Twenhofel (vergl. Pia, 1928, S. 212, Fig. 1). Ein tierisches Fossil als Kern ist wieder sehr gut zu erkennen. Im Schliff und besonders bei Vergrösserung ist die Schichtung nicht deutlich zu sehen.

4) Kudeb Fluss, Borovoje — Trübino. D^1_3, Svinord-Schichten. Hecker, 1930. Grosse, teilweise zerbrochene Knollen mit Molluskenschalen im Kern. Der Schliff zeigt gar keine organische Struktur.

5) Fluss Welikaja, unterhalb Pskow (Pleskau). D^1_3, Snetnaia Gora — Schichten. Hecker, 1930. Etwas höckerige Knollen von etwa 5 cm Durchmesser. Dieser Fall ist etwas anders zu beurteilen, als die vorher besprochenen. Das Gestein ist nämlich dolomitisiert und dabei stark kristallin geworden. Im Schliff ist deshalb von der ursprünglichen Struktur nichts mehr zu erkennen. Es ist nicht ausgeschlossen, dass vor der Dolomitisierung Girvanellen vorhanden waren. Man kann diese Stücke daher nur mit Vorbehalt zu *Pycnostroma* stellen.

Zum Schluss danke ich allen jenen, die mir beim Zustandekommen der vorliegenden Untersuchung behilflich waren, vor allem Herrn R. Hecker für die Ueberlassung des so seltenen Materiales. Bei der teilweise sehr schwierigen Beschaffung des notwendigen Schrifttumes gingen mir besonders die Herren Dr. R. Crookall (London) und Prof. G. H. Perkins (Burlington) in liebenswürdigster und wirksamster Weise an die Hand.

Naturhistorisches Museum, Wien.

ANGEFÜHRTE SCHRIFTEN

Bassler R. S. 1915. Bibliographic Index of American Ordovician and Silurian fossils. Vol. 1 & 2. U. S. Nat. Mus. Bull. № 92, Washington.

Chapman F. 1907. Newer Silurian fossils of Eastern Victoria. Part I. Rec. Geol. Survey Victoria, vol. 2, part 1, p. 5, Melbourne.

—— 1917. Preliminary notes on new species of Silurian and Devonian fossils from North-East Gippsland. Ibid., vol. 4, part 1, p. 103.

—— 1920. Paleozoic fossils of Eastern Victoria. Part IV. Ibid., vol. 4, part 2, p. 182.

Garwood E. J. 1914. Some new rock-building organisms from the Lower Carboniferous beds of Westmorland. Geol. Mag., N. S., dec. 6, vol. 1, p. 265, London.

—— 1931. Important additions to our knowledge of the fossil calcareous algae since 1913, with special reference to the Pre-Cambrian and Palaeozoic rocks. Quart. Journ. Geol. Soc. London, vol. 87, p. LXXIV.

Garwood E. J. & Goodyear E. 1924. The Lower Carboniferous succession in the Settle District and along the line of the Craven Faults. Ibid., vol. 80, p. 184.

Hirmer M. 1927. Handbuch der Paläobotanik. Band I: *Thallophyta — Bryophyta — Pteridophyta.* Mit Beiträgen von. J. Pia & W. Troll. München & Berlin.

James J. F. 1891. Manual of the paleontology of the Cincinnati Group. Part I. Journ. Cincinnati Soc. Natur. Hist., vol. 14, № 1, p. 45, Cincinnati.

Krumbeck L. 1922. Stratigraphische Ergebnisse von Niedermayers Reise durch Persien. Vorläufige Mitteilung. Cbl. f. Min. usw., 1922, p. 19, Stuttgart.

Le Maitre D. 1930. Observations sur les algues et les foraminifères des calcaires dévoniens. Ann. Soc. Géol. du Nord, vol. 55, p. 42, Lille.

Masloff W. 1929. Some microscopical algae of the Carboniferous Limestone of the Donetz Basin. Bull. Com. Géol. USSR, vol. 48, № 10, p. 1519, Leningrad.

Munthe H. 1910. On the sequence of strata within Southern Gotland. Geol. Fören i Stockholm Förhandl., vol. 32, p. 1397. — Livret-guide des excursions en Suède du XI-e Congr. Géol. Internat., fasc. 19.

Pia J. 1928. Die Anpassungsformen der Kalkalgen. Palaeobiolog., vol. 1, p. 211, Wien & Leipzig.

—— 1931 a. Algenkalkknollen aus dem russischen Perm. Jahrb. Russ. Paläont. Ges., vol. 9 p. 147, Leningrad.

—— 1931 b. Einige allgemeine an die Algen des Paläozoikums anknüpfende Fragen. Paläont Ztschr., vol. 13, p. 1, Berlin.

—— 1931 c. Ergebnisse meiner Reise nach England anlässlich des botanischen Kongresses in Cambridge. Verhandl. Zool.-Bot. Ges. Wien, vol. 81, p. 29.

—— 1932. Die Girvanellen des englischen Kohlenkalkes. Wird wahrscheinlich erscheinen in Anz. Ak. Wiss. Wien. Math.-nat. Kl., vol. 69.

Rothpletz A. 1908. Über Algen und Hydrozoen im Silur von Gotland und Ösel. Kungl. Svenska Vetenskapsakad. Handl., vol. 43, № 5, Uppsala & Stockholm.

—— 1913. Über die Kalkalgen, Spongiostromen und einige andere Fossilien aus dem Obersilur von Gotland. Sverig. Geol. Undersökn., Ser. Ca, № 10, Stockholm.

—— 1914. Über Sphaerocodium Zimmermanni n. sp., eine Kalkalge aus dem Oberdevon Schlesiens. Jahrb. Preuss. Geol. Landesanst., f. 1911, vol. 32, II, p. 112, Berlin.

Schindewolf O. H. 1925. Einige Bemerkungen über das Sphaerocodien-Konglomerat von Alt-Liebichau bei Freiburg in Niederschlesien. Ztschr. d. Deutsch. Geol. Ges., vol. 77, Abh., p. 84.

Seely H. M. 1885. A new genus of Chazy sponge, *Strephochetus.* Amer. Journ. of Sc., ser. 3, vol. 30, p. 355, New Haven.

—— 1886. The genus *Strephochetus*:—Distribution and species. Ibid., vol. 32, p. 31.

—— 1902. Some sponges of the Chazy formation. Rep. State Geologist Vermont, vol. 3, p. 151. Montpellier.

—— 1904. The Stromatoceria of Isle La Motte, Vermont. Ibid, vol. 4, p. 144.

Ulrich E. O. 1889. Preliminary description of new Lower Silurian sponges. Amer. Geologist, vol. 3, p. 233, Minneapolis.

Wethered E. 1890. On the occurence of the genus *Girvanella* in oolitic rocks, and remarks on oolitic structure. Quart. Journ. Geol. Soc. London, vol. 46, p. 270.

—— 1892. On the microscopic structure and residues insoluble in hydrochloric acid in the Devonian limestones of South Devon. Ibid., vol. 48, p. 377.

Yabe H. 1912. Über einige gesteinsbildende Kalkalgen von Japan und China. Science Rep. Tohoku Imper. Univers., Sendai, ser. 2 (Geology), vol. 1, p. 1, Tokyo.

TAFELERKLÄRUNG

Tafel I (phot. J. Pia)

Fig. 1 & 2. *Girvanella amplefurcata* nov. spec. Dünnschliff, 42 : 1. Devon, $D1_3$, Svinord-Schichten. Kudeb, Nebenfluss der Welikaja, Aufschlus 10, Schicht 8. Ges. R. Hecker, 1930.

Fig. 3. *Girvanella ducii* Wethered. Dünnschliff, 83 : 1. Devon, D^1_3, Tschudovo-Schichten. Fluss Schelonj, Dorf Suchlowa. Ges. R. Hecker, 1929.

Fig. 4. *Sphaerocodium zimmermanni* Rothpletz. Dünnchliff, 83 : 1. Oberdevon. Schlesien, Kartenblatt Freiburg, Kalkgraben bei Alt-Liebichau. Ges. O. Schindewolf. Dickere und dünnere Schläuche, besonders rechts auch einige birnförmige Körper.

Tafel II (phot. F. Felzmann)

Fig. 1. *Pycnostroma*. Uebergang zu *Ottonosia*. Polierte Gesteinsfläche, 1.3 : 1. Devon, D^1_3, Svinord-Schichten. Fl. Kudeb. Ges. R. Hecker, 1930.

Fig. 2. *Girvanella amplefurcata* nov. sp. + *Pycnostroma*. Polierte Gesteinsoberfläche, 1.2 : 1. Devon, D^1_3, Svinord-Schichten. Fl. Kudeb. Aufschuss 8, Schicht 8, Ges. R. Hecker, 1930.

Ю. ПИА. ИЗВЕСТКОВЫЕ ВОДОРОСЛЕВЫЕ ЖЕЛВАКИ ИЗ РУССКОГО ДЕВОНА

РЕЗЮМЕ

В данной работе описываются следующие водоросли, собранные Р. Геккером в отложениях Главного девонского поля в пределах Ленинградской области.

1) *Girvanella.*

a) *Girvanella amplefurcata* nov. sp. образует вокруг обломков раковин гладкие с поверхности, неправильно сферические, концентрически слоистые известковые желваки (фикопсефы) с поперечником в несколько см. Поперечник отдельных трубочек равен около 0.03 мм; они сильно изогнуты и обычно значительно разветвлены. Данная форма наиболее сходна и возможно идентична с формой, описанной Le Maître из среднего девона северной Франции (1930, табл. 3, фиг. 13). Основное местонахождение: р. Кудеб, левый приток р. Великой, ниже г. Острова. D^1_3, свинордские слои.

b) *Girvanella ducii* Wethered, не отличимая от форм, описанных из нижнекаменноугольных отложений Англии. Р. Шелонь, д. Сухлова, D^1_3, чудовские слои.

2) *Pycnostroma.* Эта форма спонгиостромид найдена в нескольких местах в области развития известняков верхнего девона; она образует известковые конкреции (иногда доломитизированные) либо в чистом виде, либо совместно с *Girvanella* или строматопорами. Иногда она представляет форму, переходную между *Pycnostroma* и *Ottonosia* (см. табл. II, фиг. 1).

ОБЪЯСНЕНИЕ К ТАБЛИЦАМ

Табл. I (фот. Ю. Пиа)

Фиг. 1 & 2. *Girvanella amplefurcata* nov. spec. Шлифы × 42. Девон, D^1_3. Свинордские слои. Р. Кудеб, приток р. Великой; обн. 10, слой 8. Колл. Р. Геккер, 1930.

Фиг. 3. *Girvanella ducii* Wethered. Шлиф × 83, Девон, D^1_3. Чудовские слои. Р. Шелонь, около д. Сухловой. Колл. Р. Геккер, 1929.

Фиг. 4. *Sphaerocodium zimmermanni* Rothpletz. Шлиф × 83. Верхн. Девон. Силезия, лист Freiburg геологической карты, известковые ямы около Alt-Liebichau. Более толстые и более тонкие трубки и справа грушевидные образования. Колл. О. Шиндевольф.

Табл. II (фот. Ф. Фельцман)

Фиг. 1. *Pycnostroma*, переходная форма к *Ottonosia*. Полированная поверхность × 1.3. Девон, D^1_3. Р. Кудеб. Свинордские слои. Колл. Р. Геккер, 1930.

Фиг. 2. *Girvanella amplefurcata* nov. spec. + *Pycnostroma*. Полированная поверхность × 1.2. Девон, D^1_3. Свинордские слои. Там же, обн. 8, слой 8. Колл. Р. Геккер, 1930.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

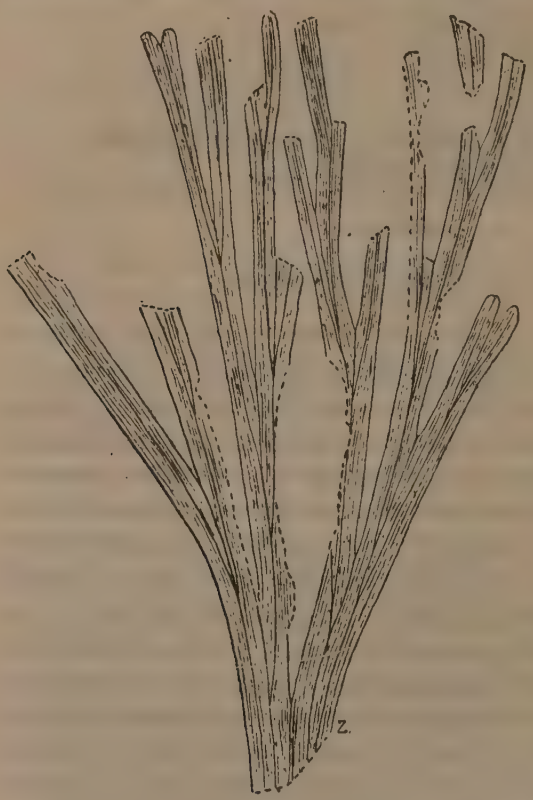
О ДВУХ НОВЫХ *DICRANOPHYLLUM* ИЗ АРТИНСКИХ ОТЛОЖЕНИЙ ПРИУРАЛЬЯ

М. Д. ЗАЛЕССКОГО

(*Представлено академиком* В. Л. Комаровым)

В коллекции растительных остатков, собранных проф. А. А. Черновым в артинских отложениях р. Сылвы, были мною обнаружены два прекрасных интересных отпечатка листьев, представляющих большой научный интерес, так как они указывают на существование в нижне-пермской флоре Приуралья оригинальных представителей рода *Dicranophyllum*, относимого к Салисбуриевым (*Salisburieae*). Появление этого рода растений на земле имеет место в начале стефанского века каменноугольного периода. Несколько видов этого рода было описано из отложений Стефанского яруса как во Франции (в каменноугольных бассейнах р. Луары и центральной Франции), так и в Германии (Oppenau) и в Португалии (Vallongo, S. Pedro da Cova). Один представитель его, а именно *Dicranophyllum cullarovense* Zalessky был описан из пермских осадков Приуралья, но из красноцветной мергелистой толщи, соответствующей конхиферовому горизонту Казанского яруса (моего Камского), т. е. из осадков значительно более молодых, чем отложения Артинского яруса р. Сылвы, откуда происходят образцы проф. А. А. Чернова. Все каменноугольные формы, как описанные Grand'Eury и Renault et Zeiller во Франции, а именно: *Dicranophyllum gallicum* Grand'Eury, *Dicranophyllum striatum* Grand'Eury и *Dicranophyllum longifolium* R. et Z, так и описанные de Lima в Португалии (*Dicranophyllum lusitanicum* (Heer) Lima) и Sterzel'ем из отложений Oppenau, принимаемых мною согласно с Zeiller'ом за стефанские, а не пермские (*Dicranophyllum Beneckeanum* Sterzel), все имеют листья более или менее удлиненной формы; они рассечены на верхушке своей рядом последовательных дихотомий на узкие лопастинки с очень небольшим расхождением их. Это обстоятельство делает листья этих форм по очертанию узкоклиновидными, сужающимися к основанию. Расчле-

нение листа дихотомически происходит у этих форм не более двух-трех раз. С несколько более широким и коротким листом является *Dicranophyllum latifolium* Sterzel из флоры Oppenau. Листья *Dicranophyllum* из коллекции проф. А. А. Чернова представляют ту особенность, что они по очертанию своему имеют форму довольно широкого клина и расчленены многократным последовательным дихотомированием на лопастинки, крайние из которых в верхушке листа отстоят одна от другой на расстоянии 10 см, что придает этим листьям ширококлиновидный облик, напоминающий несколько клиновидные листья некоторых видов *Baiera*, сходство с которыми, помимо общей формы, увеличивается и сильным расчленением листовой пластинки на узкие сегменты. Несомненно общий вид деревьев *Dicranophyllum* с сильно расчлененными, широко-клиновидными листьями, сидевшими у этого рода, в противоположность роду *Baiera*, на ветвях по одному, был несколько иной, чем вид их с узкими почти игольчатыми листьями. Вероятно, первые деревья были очень нарядны, благодаря своей оригинальной листве.



Фиг. 1. *Dicranophyllum sylvense* Zalessky. Правый берег реки Сылвы, ниже Сосновика, Артинский ярус.

Каждый образец листа коллекции А. А. Чернова представляет собой тип нового вида *Dicranophyllum*, описываемого ниже. Оба вида имеют общим признаком как характер расчленения самих листьев, так и характер их жилкования, отличаясь один от другого размерами и несколько различным обликом. Один из них называется в честь проф. А. А. Чернова, как выражение

моего уважения к его широкой геологической деятельности, связанной со многими интересными находками ископаемой флоры.

Dicranophyllum sylvense Zalessky sp. n.

Крупные листья, широко клиновидной формы, сужающиеся к основанию их и многократно вильчато делящиеся на ремневидные шириною 4—5 мм лопастинки, по которым пробегает по середине только одна жилка. Ширина листа в наиболее широкой своей части свыше 8 см, а длина неполно сохранившегося в основной части листа до 10 см. Лист расчленяется последова-

Фиг. 2. *Dicranophyllum Tchernovi* Zalessky. Правый берег реки Сылвы, ниже дер. Иванково, Артинский ярус.

тельным дихотомированием под углом приблизительно 15° до трех, а в некоторых листах до четырех раз, и даже иногда до пяти.

Судя по тому, что ширина листа в основной части около 12 мм, надо думать, что лист продолжался книзу очень немного за пределы сохранившейся части его, и действительная длина этого листа была, вероятно, не свыше 15 см. Насколько можно судить по отпечатку листа на песчанике, основная часть листа пробегается четырьмя жилками, между которыми идет ложбинка, подходящая к первому синусу листа и напоминающая жилку, но,

вероятно, представляющая просто небольшой сгиб или складку листа. Каждая жилка основной части листа, при дальнейшем следовании вверх, не доходя приблизительно 12 мм до выше расположенного синуса листа, дихотомирует под углом 15°, и каждая ветвь дихотомии направляется в отщепившуюся листовую лопастинку. Ствол жилки имеет своим продолжением ложбинку или сгиб листа, доходящую до второго синуса его и, таким образом, сгиб этот дает впечатление продолжающейся до него основной жилки. Такой тип жилкования сохраняется и выше в лопастинках последующих порядков. Кое-где заметны на коротком расстоянии вдоль наружных краев лопастинок еще по одной жилке, как это имеет место у других *Dicranophyllum*, но обычно эти жилки, как близко находящиеся к наружному краю лопастинок, совпадают в отпечатке на грубой породе с оттиском края самой лопастинки, и положение их трудно было точно установить и изобразить на рисунке. Вся поверхность листа между жилками покрыта продольными слабо выраженными штрихами, которые заметны, конечно, на грубой породе образца только местами.

Местонахождение и горизонт: Правый берег реки Сылвы, ниже Сосновика, Артинский ярус.

Dicranophyllum Tchernovi Zalessky sp. n.

Листья менее крупные, чем у предыдущего вида, клиновидной формы, сужающиеся к основанию, имеющему, вероятно, характер черешка, и расчлененные многократным, до семи раз, иногда неправильным дихотомированием на ремневидные лопастинки, шириною до 2.5 мм. Лист в сохранившейся его части длиною 93 мм., а шириною в верхней части 87 мм. Основная часть одного из расчленений листа, шириною 2.5 мм, пробегается посередине одной жилкой, которая, следуя выше и не доходя до синуса расчленения листа, дихотомирует под углом 10°—12°, и каждая ветвь жилки продолжает свой пробег кверху в лопастинку, занимая в ней срединное положение.

В некоторых местах расчленения листа можно наблюдать как бы продолжение основного ствола жилки за пределы дихотомии ее, до синуса листа, но это является следствием сгиба листовой пластинки в этом месте, находящегося на продолжении жилки и напоминающего ее. Такой тип жилкования сохраняется и выше в лопастинках последовательных порядков. Вдоль наружных краев лопастинок протягивается местами в них еще одна жилка, которая, как близко находящаяся к краю каждой из них, отпечаталась на породе вместе с последним в виде одной линии и не может быть изображена на рисунке. Поверхность лопастинок покрыта тонкими продольным штрихами.

Местонахождение и горизонт: правый берег реки Сылвы, ниже дер. Иванково, Артинский ярус.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1932
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

DIE FAUNA DES SCHWEFELSEES „BOLSCHOJ PROWAL"

Von E. ANDREEVA

(*Présenté par* N. Nasonov, *membre de l'Académie des Sciences*)

Die Untersuchung der Fauna der Salzseen des südlichen Teils der Sowjetunion, des nördlichen Kaukasiens und der Krim ist von grossem biologischen Interesse, da sie in gewissem Masse die Frage nach der Herkunft dieser Seen aufklären kann. Es liegt eine ganze Reihe von Arbeiten vor, welche der Untersuchung der Fauna der Salzseen in der Krim, der Seen des früheren Gouvernements Charkow, Orenburg und anderer Seen im südlichen und südöstlichen Teil der Sowjetunion gewidmet sind; die Bittersalzseen des nördlichen Kaukasiens sind von diesem Standpunkt aus bis jetzt beinahe gar nicht untersucht. Nach der Eigenartigkeit der biologischen Verhältnisse und nach der chemischen Beschaffenheit sind die Seen des nördlichen Kaukasiens höchst interessant; deshalb würde es besonders nützlich sein, diese Seen mit den übrigen südlichen Seen der Sowjetunion nicht nur von der geologischen und geographischen Seite, sondern auch in bezug auf ihre Fauna zu vergleichen.

Zu diesem Zwecke untersuchte ich die Fauna des Schwefelsees «Bolschoj Prowal», welcher, wie es scheint, mit den Heilschwefelquellen des Kurorts Pjatigorsk in Verbindung steht.

Der Schwefelsee «Bolschoj Prowal» befindet sich auf dem Berge Maschuk, am Grunde eines Trichters, welcher sich in einer Eruptionsspalte gebildet hat. Die Tiefe des Trichters beträgt 25 Meter. Die Wände des Trichters und der Grund des Sees bestehen aus Senon-Kalkstein (Oberkreidesedimentgestein), welcher durch atmosphärische Niederschläge und Ausdünstungen aus dem See stark erweicht ist. Der See nimmt nur einen Teil des Grundes des Trichters ein und seine Grösse beträgt ca. 45 m^2.

Die Wände des Trichters bilden über dem See ein halbdunkles Gewölbe und nur ein Seeufer, welches sich unmittelbar unter der Öffnung des Trichters befindet, ist besser beleuchtet.

Der Grund des Sees stellt eine Fortsetzung der Wände des Trichters dar und seine Wände verlaufen vom Ufer unter einem Winkel von 39°; er wird allmählich immer enger und geht in eine Spalte über, welche sich auf mehrere Tausend Fuss in die Tiefe erstreckt und das Seewasser mit den Untergrund gewässern verbindet. Das Niveau des Sees ist unbeständig. Der See ist in der Meereshöhe von 1969 Fuss gelegen, zuweilen ist sein Niveau höher (die Differenz zwischen dem höchsten und niedrigsten Niveau erreicht 2.75 Fuss). Die periodischen Schwankungen des Niveau hängen, wie es scheint, davon ab, dass zu den Mineralquellen, welche den See speisen, sich auch Süsswasser (Niederschläge, schmelzender Schnee) beimengt. Das Wasser im See ist fliessendes Wasser. Nach den Untersuchungen von A. N. Ogilvi sind die Hauptgesteine des südlichen Abhangs des Berges Maschuk gleichsam mit Mineralwasser gesättigt, welches in den Spalten zirkuliert. Der See «Bolschoj Prowal» ist durch Mineralwasser gebildet, welches sich in einer von diesen Spalten befindet. Das Wasser dringt durch die Spalten im Boden des Sees weiter ein und zirkuliert unter der Erde.

Das Wasser des Sees ist hellblau und trübe. Die blaue Farbe des Wassers hängt, wahrscheinlich, von dem starken Grade der Dispersion des Kolloidschwefels ab, welcher sich bei der Oxydation des Schwefelwasserstoffes durch Luft bildet, nach der Reaktion:

$$2H_2S + O_2 = 2H_2O + 2S.$$

An der Wasseroberfläche schwimmt ein Häutchen von kristallinischem Schwefel, welcher als Folge der Koagulation der Kolloidpartikeln des Schwefels entsteht.

Im Trichter über dem See und auf mehrere Meter in der Umgebung des Trichters riecht es stark nach Schwefelwasserstoff. Die Wassertemperatur im See schwankt, nach den Angaben der Nordkaukasischen Abteilung des Geologischen Komitee, zwischen 26° und 39° C. Die höchste Temperatur (39°) wird während der Sommermonate (Juni, Juli) beobachtet, eine Absenkung findet im Winter statt, was, wahrscheinlich, mit der langsamen Strömung im Zusammenhang steht, welche die Abkühlung befördert. Die chemische Analyse des Seewassers zeigt, dass es dem Typ nach zu den H_2S — Gewässern gehört.

Chemische Analyse

Temperatur des Wassers	38.75° C
Spezifisches Gewicht bei 18° C	1.00382

Gefundene Bestandteile

Auf 1000 cm^3 Wasser	Gramm
Trockenrückstand	3.79100
Kohlensäure, insgesamt (CO_2)	1.89324
» gebunden (CO_2)	0.50086
Unterchwefelige Säure	Spuren
Schwefelwasserstoff (H_2S)	0.00360
Schwefelsäure Anhydrid (SO_3)	0.65325
Chlor (Cl)	0.87421
Kalium (Kaliumoxyd) K_2O	0.07101
Natrium (Natriumoxyd) Na_2O	0.67173
Magnesium (Magniumoxyd) MgO	0.08991
Tonerde (Aluminiumoxyd) (Al_2O_3)	Spuren.
Halbgebundene Kohlensäure, nach dem Volumen in ccm	254.24
Freie Kohlensäure, nach dem Volumen in ccm	452.54
Schwefelwasserstoff (frei) nach dem Volumen in ccm	2.38

Kombination der Bestandteile

Chlorkalium (KCl)	0.11248
Chlornatrium (NaCl)	1.35238
Schwefelsaures Natrium (Na_2SO_4)	0.97026
Schwefelsaurer Kalk ($CaSO_4$)	0.04524
Schwefelsaures Magnesium ($MgSO_4$)	0.12003
Natrium-Thiosulfat ($Na_2S_2O_3$)	Spuren
Kohlensaurer Kalk ($CaCO_3$)	1.02216
Kohlensaures Magnesium ($MgCO_3$)	0.08535
Kohlensaures Natrium (Ns_2CO_3)	0.04192
Kieselerde (Si_2O)	0.06891
Tonerde (Al_2O_3)	Spuren
Summe der festen Bestandteile	3.81873
Freier Schwefelwasserstoff (H_2S)	0.00360
Halbgebundene Kohlensäure (CO_2)	0.50086
Freie (CO_2)	0.89152
Summe sämtlicher Bestandteile	5.21471

Die eigenartigen Besonderheiten des Sees — seine Lage hoch über dem Meere und tief in einer Bergspalte, das Fehlen einer normalen Beleuchtung, die hohe Temperatur und das fliessende Wasser, die grossen Mengen der ausgeschiedenen Kohlensäure und des Schwefelwasserstoffes — machen die Flora und Fauna des Sees besonders interessant. Meine Untersuchungen wurden im Juli und August 1930 ausgeführt. Die Temperatur des Wassers betrug beständig ca. 32—35° C. Es wurde so viel Gas (H_2S und CO_2) ausgeschieden, dass die Seeoberfläche sich von Zeit zu Zeit mit

Bläschen bedeckte. Der Teil des Ufers, welcher am besten beleuchtet war (unter der Öffnung des Trichters), war von einem feinen Algen-anflug bedeckt. Die Proben für meine Untersuchung wurden unmittelbar aus dem See genommen — von der Oberfläche und aus der Tiefe — in verschiedenen Stellen des Trichters. Der Schlamm vom Boden des Sees und am Ufer wurde besonders untersucht. Aus den vorhandenen Angaben des Schrifttums über die Fauna der Salzseen sehen wir, dass die Hauptbewohner derselben die Protozoen sind. Von den Metazoen kommen gewöhnich die Crustaceen, Rotatorien, Insekten und Würmer vor. Im See «Bolschoj Prowal» gelang es mir aber, abgesehen von einigen spätlichen Arten der Protozoen, einigen Algenarten und Bakteriziden, gar nichts zu finden.

Von den Protozoen wurden von mir folgende Arten gefunden:

AMOEBINA

1. **Amoeba radiosa** Ehrb. Süsswasserform. Abgesehen vom Süsswasser, wurde diese Form in den Salzseen von Transylvania, in den Salzseen Südrusslands und in den Limanen von Odessa und der Krim gefunden.

2. **Amoeba verrucosa** Ehrb. Süsswasserform. Kommt in den Salzseen und Limanen Südrusslands vor.

3. **Amoeba diffluens** Ehrb. Süsswasserform. Kommt in allen europäischen Meeren, in den Salzseen von Transylvania und der südlichen Gebiete der Sowjetunion vor.

4. **Amoeba limax** Duj. Süsswasserform. Kommt auch im Meere vor. In den Salzseen Südrusslands und in den Limanen von Odessa und der Krim.

5. **Pelomyxa palustris** Ehrb. Susswasserform, eine von den charakteristischen Arten (Lauterborn), welche in stagnierendem Wasser leben, das an Schwefelwasserstoff und an Produkten des Eiweisszerfalls reich ist.

Von den genannten Amoebenarten, die im See «Prowal» vorkommen, wurden folgende Arten — Amoeba radiosa, Amoeba limax, Amoeba verrucosa und Amoeba diffluens — auch in den Seen des früheren Gouvernements Charkow, in den Tscheljabinsk-Seen des früheren Gouvernements Orenburg, im Sea Ssiwasch, Oi-Bur und im Ssak'schen See in der Krim, im Donuslaw'schen und Mainak'schen See, in den Limanen Tiligulski, Ssuchoi, Grigorjewsky, Dofilowski, Kujalnizky, Beresanski, Chadschibejski und in den Limanen von Odessa gefunden. Angesehen davon wurden die Amoeba limax und Amoeba diffluens noch im Mittelländischen, Schwarzen und Kaspischen Meere angetroffen.

FLAGELLATA

1. **Peranema trichophorum** St. Süsswasserform. Wurde von Eutz und Daday in den Salzseen von Transylvania gefunden. Kommt in den europäischen Meeren vor und wurde in allen oben erwähnten Seen des Südlichen Teils der Sowjetunion und in allen Limanen gefunden.

2. **Oxyrrhis marina** Duj. Seeform. Wurde im Atlantischen Ozean, in der Nordsee, im Weissen, Mittelländischen, Schwarzen und Kaspischen Meere gefunden. Sehr gewöhnliche Form in den Salzseen Südrusslands.

3. **Eutreptia viridis** Persq. Süsswasserform. Kommt im See — uud Süsswasser vor. Wurde in den Salzseen und Limanen des südlichen Teils der Sowjetunion gefunden.

INFUSORIA CILIATA

1. **Paramaecium caudatum** Ehrb. Grösse: 120—325 μ lang. Kommt in den Süsswasserbassins von Europa, Amerika, Afrika, der Sandwichinseln und in den europäischen Meeren vor. Im «Prowal» See ist die Grösse dieser Infusorien ein wenig geringer, als gewöhnlich 90—150 μ lang) und sie bewegen sich schneller, als in den gewöhnlichen Bedingungen; das wird, wie es scheint, durch die hohe Temperatur des Wassers im See bedingt (32—35°), während in der Norm die optimale Temperatur für diese Art 15—20° C ist. Es fällt auch die grosse Zahl der Nahrungsvakuolen (von 45 bis 60) auf, welche durch die guten Ernährungsbedingungen erklärt wird.

2. **Lacrymaria lagenula** Cl. et L. Grösse: 70—99 μ. Seeform. Kommt im Atlantischen Ozean, im Baltischen Meere, im Nördlichen Eismeer, im Mittelländischen, Schwarzen und Kaspischen Meere vor. Wurde in den Salzseen von Transylvania und in den Salzsteppen der Sandwichinseln gefunden.

3. **Lionotus fasciola** Ehrb. Grösse: 80—100 μ. Süsswasserform, kommt auch im Meere vor. Wurde im Süsswasser in allen Weltteilen, in den Salzseen von Transylvania und in allen europäischen Meeren gefunden. Im See «Boljschoi Prowal» ist dieses Infusorium, wie es scheint, gelb gefärbt, dank den intracellulären Ablagerungen, die, vielleicht, aus Schwefel bestehen.

4. **Condylostoma patens** Dup. Kommt im Süsswasser in Europa und Nordafrika vor und in dem nördlichen Eismeer, im Mittelländischen, Schwarzen und Kaspischen Meere.

5. **Uronema marina** Schew. Grösse: 20—60 μ. Diese Art gehört nicht zu den besonders verbreiteten Formen; kommt im Süsswasser in Europa und Nordamerika und in den europäischen Meeren vor.

6. **Uronema ovale** Schew. Grösse: 90 μ. Seltene Art, kommt im Süsswasser in Europa und Nordamerika vor.

7. **Cyclidium glaucoma** B. Grösse: 18—24 μ. Kommt im Süsswasser in allen Weltteilen, in den Meeren von Europa und in den Salzseen von Transylvania vor.

8. **Cyclidium citrullus** Cohn. Grösse: 28—42 μ. Kommt in allen europäischen Meeren und im Süsswasser in Europa vor.

Abgesehen davon, wurden die Infusorien *Lacrymaria lagenula*, *Lionctus fasciola*, *Uronema marina* und *Condylostoma patens* in den Salzseen des früheren Gouvernements Charkow (Seen Wejssowo, Repnoje, Slepnoje, Schtschemilowskoje), in den Tscheljabinsk-Seen des früheren Gouvernements Orenburg, in den Seen der Krim [Ssiwasch, Oi-Bur, Ssak'scher, Donuslaw'scher, Mainak'scher See und der Salzsee in der Kruglaja Buchta (Runde Bucht)], in den Salzseen des südöstlichen Teils der Sowjetunion und in den Limanen-Tiligulski, Ssuchoi, Grigorjewski, Dofilowski, Chadschibejski, Beresanski, Kujalnizki und in den Limanen von Odessa gefunden.

Das *Cyclidium glaucome* wurde in allen oben genannten Seen gefunden, mit Ausnahme des Salzsees der Runden Bucht und der Limane von Odessa.

Das *Cyclidium citrullus* wurde in keinem einzigen von den ober genannten Salzseen des südlichen Russlands und von den Limanen gefunden, mit Ausnahme des Salzsees der Runden Bucht in der Nähe von Sebastopol und im Flusse «Tschernaja Rjetschka» (daselbst), in welchen diese Form in einer grossen Menge nachgewiesen wurde.

Die Infusorien *Paramaecium caudatum*. *Lacrymaris coronata* und *Uronema ovale* wurden in keinem einzigen von den Seen Südrusslands gefunden; alle oben genannten Formen ohne Ausnahme kommen aber im Schwarzen Meere vor.

Wie aus dem Vergleich der Fauna des «Prowal» Sees mit der Fauna der übrigen Salzseen Südrusslands ersehen werden kann, stellt sie beinahe gar keine Ausnahmen dar; sie unterscheidet sich nur durch die viel geringere Zahl von Arten sowohl der See-, wie auch der Süsswasserformen.

Da ferner die Salzseen Bassins mit charakteristischen biologischen Besonderheiten darstellen, so kommen häufig unter den Bewohnern dieser Seen Formen vor, welche sich von den Süss — und Seewasserformen durch diese oder jenen Veränderungen der Merkmale unterscheiden, oder Formen, die nur für den gegebenen See charakteristisch sind. So hat Schman-

kewitsch neue Copepodaarten in den Limanen von Odessa entdeckt. Eutz und Daday haben mehrere neue Arten der Protozoa in den Salzseen von Transylvania beschrieben; Stepanov jat Abarten einiger Arten in den Salzseen des früheren Gouvernements Charkow gefunden, welche später auch in den übrigen Seen Südrusslands nachgewiesen wurden. Im «Prowal» — See gelang es mir aber keine einzige für die Salzseen allein charakteristische Art zu finden; spezifische Abänderungen, welche durch die chemischen oder biologischen Bedingungen des gegebenen Sees hervorgerufen wären, habe ich bei den gefundenen Formen ebenfalls nicht nachgewiesen. Dieser Umstand wird, vielleicht, dadurch bedingt, dass der Schwefelwasserstoff des Sees auf den Organismus ohne besondere Einwirkung bleibt.

Wenn man alle Vertreter der Protozoa nach dem System von Kolkwitz und Marsson in drei Gruppen einteilt, in Abhängigkeit von dem Charakter der Bassins, in welchen sie besonders häufig vorkommen, so gehört die Mehrzahl ber Vertreter der Fauna des «Prowal» — Sees der Mesasoprobiengruppe an, welche in der Mehrzahl der Fälle in Gewässern beobachtet werden, die an Mineralstoffen und Produkten des Eiweisszerfalls reich sind. Von den pflanzlichen Formen und Bakterien sing für diese Gruppe die Organismen charakteristisch, welche den Schwefelwasserstoff oxydieren und den Schwefel aufnehmen. Aus Lauterborn's Arbeit ersehen wir aber, dass in den Gewässern, die an Schwefel- und Chlorbakterien reich sind, stets einige Arten von Amoeben, Infusorien und Flagellaten vorkommen, wie z. B. *Paramaecium caudatum*, *Lacrymaria*, *Amoeba limax*, *Palomyxa palustris*, *Eutreptia viridis* und kleine Vertreter der Chrysomonadinae, — d. h. die jenigen Bewohner des Schwefelsees «Prowal», welche unter den Vertretern der übrigen Salzseen nicht charakteristisch sind.

Schlussfolgerungen

1. Die Fauna des Schwefelsees «Bolschoj Prowal» unterscheidet sich in qualitativer Beziehung beinahe gar nicht von der Fauna der Salzseen Südrusslands.

2. In quantitativer Beziehung ist die Fauna dieses Sees spärlicher, als in den übrigen Salzseen.

3. Im See «Bolschoj Prowal» wurden gar keine Arten und Abarten gefunden, welche für den gegebenen See charakteristisch wären.

Ich hatte es für eine angenehme Pflicht dem Akademiker N. W. Nassonow für das Interesse zu danken, welches er meiner Arbeit schenkte.

SCHRIFTEN

Fomin. Analysen des kaukasischen Mineralwassers, 1899 (russisch).
Batalin. Pjatigorsk-Gebiet und kaukasische Mineralquellen, 1861 (russisch).
Eichelman. Kurzer Grundriss den Geologie und Hydrologie des Bezirks der kaukasischen Mineralquellen, 1903 (russisch).
Stepanow P. I. Fauna des Sees Wejssowo. Verhandl. der Naturforschergesellschaft an der kaiserl. Universität Charkow, Bd. XIX, 1885 (russisch).
2. Beiträge zur Untersuchung der Fauna der slawischen Salzseen. Bulletin de la Société des naturalistes de Moscou, t. 62, 1886 (russisch).
Kulagin, N. M. Beiträge zur Fauna der Salzseen in der Krim. Verhandl. der Zoolog. Abteilung der kaiserl. Universität zu Moskau. 1888 (russisch).
Dagajewa, W. A. Infusorien des Salzsees der Runden Bucht in der Nähe von Sebastopol. Abhandlungen der biologischen Station in Sebastopol, Bd. II, 1930 (russisch).
Lauterborn, R. Die sapropelische Lebewelt. Verhandlungen des Naturhist.-Medizin. Vereins zu Heildelberg, Bd. 13, H. 2, 1916
Kolkwitz, R. und Marsson, M. Ökologie der tierischen Saprobien. Internat. Revue der gesamten Hydrobiologie, Bd. 2, H. 1 u. 2. 1909.

Die Zoologische Abteilung (Vorstand Akademiker N. Nasonov) des Wissenschaftlichen Lesshaft-Institutes

---

Е. В. АНДРЕЕВА. ФАУНА СЕРНОГО ОЗЕРА „БОЛЬШОЙ ПРОВАЛ"

РЕЗЮМЕ

Фауна горячего серного озера «Большой Провал», расположенного на горе Машук (около Пятигорска), представляет собою большой интерес, так как до сих пор предполагалось, что, вследствие неблагоприятных условий существования, в данном озере кроме бактерий не может быть живых организмов.

Озеро расположено на дне воронки глубиной в 15 м, образовавшейся по сбросовой трещине на высоте 1696 фут. над уровнем моря. Вода озера проточная и связана, повидимому, с циркулирующими подземными водами и лечебными серными источниками. Температура воды = 26—39° Ц. Анализ воды показывает присутствие в ней больших количеств сероводорода с углекислотой. Нормального дневного освещения нет.

Несмотря на все эти неблагоприятные биологические условия, мне удалось определить в озере следующую фауну:

AMOEBINA

Amoeba radiosa Ehrb.
Amoeba verrucosa Ehrb.
Amoeba diffluens Ehrb.
Amoeba limax Duj.
Pelomyxa palustris Ehrb.

FLAGELLATA

Peranema trichophorum St.
Oxyrrhis marina Duj.
Eutreptia viridis Persq.

INFUSORIA CILIATA

Paramaecium caudatum Ehrb.
Lacrymaria lagenula Cl. et L.
Licnotus fasciola Ehrb.
Condylostoma patens Dup.
Uronema marina Schew.
Uronema ovale Schew.
Cyclidium glaucoma B.
Cyclidium citrullus Cohn.

Почти все вышеуказанные виды встречаются также и в других соленых озерах юга СССР и в большей части европейских морей. Фауну озера «Большой Провал» можно отнести к группе Mesasoprobien, т. е. к группе *Protozoa*, обыкновенно живущей в водах, богатых минеральными веществами и продуктами белкового разложения. Те же виды инфузорий и жгутиковых, которые не встречаются в других соленых озерах или не являются характерными для них, но найдены мною в озере «Большой Провал», по данным из работы Лаутерборна являются наиболее частыми обитателями водоемов, богатых хлоробактериями и серными бактериями, что наблюдается и в «Большом Провале».

Из моей работы я могу сделать следующие выводы:

1. Фауна серного озера «Большой Провал», несмотря на неблагоприятные условия существования, почти не отличается от фауны других южнорусских соленых озер.

2. Количественно фауна этого озера представлена более бедно, чем в других соленых озерах.

3. Специфических видов и видоизменений форм в озере «Большой Провал» не найдено.

ПОПРАВКА

Приложенные к статье В. А. Кистяковского и П. Д. Данкова «К вопросу об электрокристаллизации металлов» в № 7 ИМЕН за тек. год, стр. 993 и сл., две таблицы следует рассматривать: таблицу, помеченную цифрой I, как табл. II, а табл. II, как табл. I.

Оглавление — Sommaire

	стр.
*Н. И. Ахиезер. О некоторых функциях, наименее отклоняющихся от нуля в двух данных промежутках. Часть первая (с 4 фиг.)	1163
*В. С. Игнатовский. Распространение волн и дифракция в неоднородной изотропной среде (с 4 фиг. и резюме на русск. яз.)	1203
С. Н. Бернштейн. О формуле приближенного интегрирования Чебышева	1219
*Я. С. Безикович. Метод наращивания числа десятичных знаков таблицы (с резюме на русск. яз.)	1229
А. С. Васильев и Н. И. Васильева. Волны годовая и $14^1/_2$-месячная в колебаниях широты Пулкова по результатам параллельных наблюдений и выводов	1235
А. П. Карпинский. О проблематических отпечатках, известных под названием *Paleodictyon* Meneghini (с 8 фиг. и 2 табл.)	1255
М. А. Галаджиев. К проблеме бессмертия простейших (Двадцать лет культуры инфузории *Paramaecium caudatum* без конъюгации). Часть первая	1269
В. И. Кудрявцев. К вопросу о полиморфизме бактерий. Новые формы развития *Bacillus megatherium* de Bary (с 1 фиг. и 1 табл.)	1301
Н. А. Красильников. К вопросу о половом процессе у бактерий (с 3 фиг. и резюме на немецк. яз.)	1329
М. Н. Мейсель. Действие цианистых солей на развитие дрожжей (с 6 фиг.)	1337
*Ю. Пиа. Известковые водорослевые желваки из русского девона (с 2 табл. и резюме на русск. яз.)	1345
М. Д. Залесский. О двух новых *Dicranophyllum* из артинских отложений Приуралья (с 2 фиг.)	1361
*Е. В. Андреева. Фауна серного озера «Большой Провал» (с резюме на русск. яз.)	1365

	PAG.
N. Achyeser. Über einige funktionen, welche in zwei gegebenen Interwallen am wenigsten von Null abweichen. I Teil (mit 4 Fig.)	1163
V. Ignatovskij (W. v. Ignatowsky). Wellenfortpflanzung und Beugung in inhomogenen isotropen Medien (mit 4 Fig. und einem russischen Zusammenfassung)	1203
*S. Bernstein. Sur la formule de quadrature approchée de Tchebycheff	1219
J. Bezikovič. Une méthode pour accroître le nombre des décimales d'une table (avec résumé en russe)	1229
*A. Vasiljev et N. Vasiljeva. Les ondes de périodicité annuelle et de $14^1/_2$ mois dans les fluctuations de la latitude de Poulkovo d'après les résultats d'observations effectuées parallèlement	1235
*A. Karpinskij. Sur les impressions problématiques connues sous le nom *Paleodictyon* Meneghini (avec 8 fig. et 2 pl.)	1255
*M. Galadžiev (M. Galadjieff). Sur le problème d'immortalité des Protozoaires (Vingt ans de culture des infusoires *Paramaecium caudatum* sans conjugation). Première partie	1269
*V. Kudrjavzev. Sur la question de polymorphisme chez les bacteries. Nouvelles formes d'évolution de *Bacillus megatherium* de Bary (avec 1 fig. et 1 pl.)	1301
*N. Krasilnikov. Sur la question de processus sexuel chez les bacteries (avec 3 fig. et résumé en allemand)	1329
*M. Meissel. L'action des cyanures sur le développement des levures (avec 6 fig.)	1337
J. Pia. Algenkalknollen aus dem russischen Devon (mit 2 Tafeln und einem russischen Zusammenfassung)	1345
*M. Zalesskij (M. Zalessky). Sur les deux nouveaux *Dicranophyllum* du terrain artinskien de l'Oural (avec 2 fig.)	1361
E. Andreeva. Die Fauna des Schwefelsees «Bolschoj Prowal» (mit einem russischen Zusammenfassung)	1365

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.

Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 3 руб.